Centrale 2015 - PSI 1
un corrigé

I. Etude d'une suite récurrente

I.A

1. f' étant positive, f croit sur $[0,1]$. Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- Initialisation : c'est vrai au rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) \in [0,1]$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n. On a alors $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et par croissance de f sur $[0,1]$,

$$u_{n+2} - u_n = f(u_{n+1}) - f(u_n) \geq 0$$

En outre, comme $[0,1]$ est stable par f, $u_n, u_{n+1} \in [0,1]$ entraîne $u_{n+1} = f(u_n), u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0,1]$. On a ainsi prouvé le résultat au rang $n+1$.

On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle reste dans $[0,1]$. Par théorème de limite monotone, la suite converge et de plus (passage à la limite dans une inégalité large)

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in [0,1]$$

2. Comme $f(1) = 1$, l'ensemble $A = \{x \in [0,1]/\ f(x) = x\}$ est non vide. Comme il est minoré, il admet une borne inférieure x_f. Mais $A = (g - Id)(\{0\})$ est fermé (image réciproque par une application continue d'un fermé) et donc $x_f \in A$ ce qui montre que x_f est un minimum. Il y a donc bien une plus petite solution à l'équation $f(x) = x$.
3. Comme f croît sur $[0,1]$, on a $f([0,x_f]) = [f(0), f(x_f)] = [0,x_f]$. $u_0 \in [0,x_f]$ et $[0,x_f]$ est stable par f, donc (récurrence simple sur le modèle de la précédente)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,x_f]$$

Par passage à la limite, $\ell \in [0,x_f]$. f étant continue sur $[0,1]$, un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne de plus $f(\ell) = \ell$. Enfin, par minimalité, x_f est le seul point fixe de f dans $[0,x_f]$. On a donc

$$x_f = \ell$$

I.B Posons $g(x) = f(x) - x$. g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $g'(x) = f(x) - 1$. Si $m > 1$ alors $g'(1) > 0$ et g est localement strictement croissante au voisinage de 1. Comme $g(1) = f(1) - 1 = 0$, il existe donc $a \in [0,1[$ tel que $g(a) < 0$. Enfin, $g(0) = f(0) \geq 0$ et par théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[0,a] \subset [0,1[$. On en déduit que $x_f \in [0,a]$ et donc que

$$x_f \in [0,1[$$

I.C Notons toujours $g(x) = f(x) - x$. On a $g \in C^2([0,1])$ et $g'(x) = f(x) - 1$, $g''(x) = f''(x) \geq 0$; comme $g''(1) = f''(1) > 0$, g'' (qui est continue) est même strictement positve sur un intervalle $[a,1[$. g' est donc croissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[a,1]$. Comme $g'(1) = m-1 \leq 0$, g' est négative sur $[0,1]$ et même strictement négative sur $[a,1[$. g est donc décroissante sur $[0,1]$ et même strictement décroissante sur $[a,1]$. En particulier, $\forall x \in [a,1[,\ \ g(x) > 0$ et $\forall x \in [0,a],\ g(x) \geq g(a) > 0$. g ne s'annule donc pas sur $[0,1[$ et ceci impose

$$x_f = 1$$

Sur $[a, 1[$, f'' est strictement positive et f' est donc strictement croissante sur $[a, 1]$. Ainsi, $\forall x \in [a, 1],\ f'(x) \leq m$. Si, par l'absurde, m était nul alors f' serait nulle sur $[a, 1]$. Comme f' est positive et croissante sur $[0, 1]$ ($f'' \geq 0$) on aurait donc f' nulle sur $[0, 1]$ ce qui contredit $f''(1) > 0$. On a donc $f'(1) > 0$ et f est strictement croissante au voisinage de 1. Comme elle est croissante sur $[0, 1]$, elle ne prend finalement la valeur 1 qu'en 1. Si, par l'absurde, on avait $u_n = 1$, on aurait $f(u_{n-1}) = 1$ et donc $u_{n-1} = 1$. Par une récurrence descendante, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est faux. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1[$$

I.D

1. On a $u_n = 1 - \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \to 0$. Par formule de Taylor-Young,

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - \varepsilon_n) = f(1) - \varepsilon_n f'(1) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$$

   On en déduit que

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

   On passe à l'inverse (possible puisque la suite (ε_n) ne s'annule pas) et en utilisant $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u)$ on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

   Il en résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

2. D'après le théorème de Césaro,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

   Dans la somme, les termes se télescopent et ce qui précède s'écrit

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

   $\frac{1}{n\varepsilon_0}$ étant de limite nulle est $o(1)$ et ce qui précède s'écrit aussi

$$\frac{1}{n\varepsilon_n} = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

   ou encore (puisque $f''(1) \neq 0$) $n\varepsilon_n \sim \frac{f''(1)}{2}$. On peut passer à l'inverse dans les équivalent et multiplier les équivalents. On a ainsi

$$1 - u_n = \varepsilon \sim \frac{2}{nf''(1)}$$

I.E

1. Le même calcul que ci-dessus donne

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(m - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = |m| = m \in [0, 1[$$

Par règle de D'Alembert, $\sum(\varepsilon_n)$ est donc absolument convergente.
Notons que le cas $m = 0$ est impossible d'après le raisonnement de la question **I.C**. On peut donc diviser par $m > 0$. En reprenant l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{2m} f''(1) + o(\varepsilon_n)$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = O\left(\varepsilon_n\right)$$

qui est le terme général d'une absolument convergente. On a montré que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente.

2. Notons L la somme de la série de la question précédente. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{m\varepsilon_k}\right) = L + o(1)$$

Avec les propriétés de morphisme du logarithme, les termes se télescopent et on obtient

$$\ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_0) - n\ln(m) = L + o(1)$$

ou encore

$$\varepsilon_n = m^n e^L \varepsilon_0 e^{o(1)}$$

Comme $e^L\varepsilon_0 > 0$ (ce qui importe est la non nullité) on a finalement

$$1 - u_n = \varepsilon_n \sim cm^n \quad \text{avec} \quad c = e^L\varepsilon_0 > 0$$

II. Formule de Wald

II.A

1. Les variables X et Y étant indépendantes, pour toute fonction f les variables $f(X)$ et $f(X)$ le sont et on a donc, sous réserve que les espérances existent $\mathbb{E}(f(X)f(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(f(Y))$. Avec la fonction $x \in \mathbb{N} \mapsto t^x$ (pour un réel quelconque t fixé dans $[-1, 1]$), on obtient (le cours nous indique que les espérances existent toutes)

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$$

2. Montrons par récurrence que la propriété

$$G_{S_k} = (G_X)^k$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Initialisation : l'hypothèse est immédiatement vraie au rang 1.
- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que l'hypothèse soit vraie aux rangs $1, \dots, k$. D'après la question précédente (et le résultat d'indépendance admis) la fonction génératrice de $X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ est $G_{S_k}G_X$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle vaut $(G_X)^{k+1}$.

La propriété est aussi vraie au rang 0 puisque $G_{S_0} = 1$ (S_0 étant constante égale à 0) et que $(G_X)^0 = 1$.

3. $(T = k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))$$

On en déduit que

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))t^n \right)$$

Comme on a l'égalité des événements $(S = n) \cap (T = k)$ et $(S_k = n) \cap (T = k)$ et comme S_k et T sont admis indépendants, on a alors

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

On fixe $K \in \mathbb{N}$. On peut découper la somme intérieure en deux :

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

Pour écrire $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$, il nous suffit (sachant que le membre de gauche existe) de montrer que l'un des deux termes du membre de droite existe (l'autre existera alors fatalement). On écrit (ici on a des sommes finies et donc pas de problème)

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n = \sum_{k=0}^{K} \left(\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_k = n)t^n \right) \mathbb{P}(T = k)$$

$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_k = n)t^n$ est le terme général d'une suite convergente de limite $G_S(t) = G_X(t)^k$. On a donc convergence ci-dessus (somme d'un nombre constant de suite convergente) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n = \sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k)$$

Avec tous ces arguments, on peut finalement écrire

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

Remarque : la formule est valable pour $t \in [-1, 1]$ *et pas seulement* $t \in [0, 1]$.

4. On prend $t \in [0, 1]$ et $K \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall k \geq K + 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \leq \mathbb{P}(T = k)t^n$$

Comme $\sum(\mathbb{P}(T = k))$ converge (série positive de somme 1) on peut sommer pour $k \geq K$ et obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \leq \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) \right) t^n$$

Comme $t \in [0, 1[$, $\sum(t^n)$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1+t}$. On en déduit que

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1 - t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

5. A $t \in [0,1[$ fixé, la question précédente montre que $R_K \to 0$ quand $K \to +\infty$. On peut ainsi faire tendre K vers $+\infty$ dans **II.A.3** pour obtenir

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) = G_T(G_X(t)) = G_T \circ G_X(t)$$

Ceci n'est prouvé que pour $t \in [0,1]$ mais le résultat rappelé en préambule indique que cela suffit pour conclure que

$$G_S = G_T \circ G_X$$

II.B Si Y est une variable d'espérance finie, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1)$. Ici, en supposant que les espérances existent, on a (puisque $G_X(1) = 1$)

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_T(G_X(1)).G'_X(1) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$$

II.C

1. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout n, $\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ et

$$\forall t \in [-1,1],\ G_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

2. Ici, $T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $\forall i,\ X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$. S est alors le nombre d'insectes issus de la ponte. On a

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = G_T(G_X(t)) = G_T(1 - \alpha + \alpha t) = e^{-\lambda\alpha} e^{\lambda\alpha t}$$

et on conclut que

$$S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\alpha)$$

III. Processus de Galton-Watson

III.A

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On est exactement dans la situation de la partie précédente. Ici, $T = Y_n$ et les X_i sont les $X_{n,i}$. Y_{n+1} correspond alors à S et **II.A** donne (toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées)

$$\varphi_{n+1} = G_{Y_{n+1}} = G_{Y_n} \circ G_{X_{n,1}} = \varphi_n \circ f$$

2. De même, **II.B** donne

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(f)$$

et (on a une suite géométrique)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(f)^n \mathbb{E}(Y_0) = m^n$$

3. L'événement E : "il y a extinction" est égal à les réunion des événements $(Y_n = 0)$ (il y a extinction si la population fini par être nulle) :

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (Y_n = 0)$$

Les événements $(Y_n = 0)$ étant emboîtés, on peut utiliser la continuité croissante pour en déduire que

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0)$$

Avec **III.A.1** et $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n = f^{(n)}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'itérée n fois de f pour la composition (avec la convention $f^{(0)} = \mathrm{Id}$). En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{n+1}(0) = f(f^{(n)}(0)) = f(\varphi_n(0))$$

et $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie **I**. Il nous reste à montrer que la fonction f vérifie les hypothèses de cette partie.

- f est de classe C^2 sur $[0,1]$ puisque l'on a suppos que la loi μ possède une espérance et une variance. De plus, f' et f'' sont à valeurs positives puisque

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t) = \sum_{k\geq 0}(k+1)p_{k+1}t^k \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)p_{k+2}t^k$$

- f est définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ ($\forall t \in [0,1],\ 0 \leq f(t) = \sum_{k\geq 0} p_k t^k \leq \sum_{k\geq 0} p_k = 1$).
- $f(1) = \sum_{k\geq 0} p_k = 1$.
- $f'(0) = p_1 \leq p_0 + p_1 < 1$.
- $f''(1) = \sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)p_{k+2} > 0$ car l'un des p_{k+2} est > 0.

4. Si $m \leq 1$ alors $\varphi_n(0) \to 1$ d'après **I.C**. La population s'éteint donc presque sûrement.

III.B

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $T(\omega) = k$ alors $Y_{k-1}(\omega) \neq 0$ et $Y_k(\omega) = 0$. En particulier $(T = k) \subset (Y_{k-1} \neq 0)$ et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \mathbb{P}(T = k) \leq \mathbb{P}(Y_{k-1} \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{k-1} = 0) = 1 - \varphi_{k-1}(0)$$

D'après la question **I.E** (on est bien dans le cas $m < 1$), $k(1 - \varphi_{k-1}(0)) \sim ckm^{k-1}$ est le terme général d'une série convergente (par comparaison aux séries de Riemann puisque ce terme est $o(1/k^2)$puisque $m \in [0,1[$). A fortiori, $k\mathbb{P}(T = k)$ est aussi le terme général d'une série convergente (comparaison de séries positives) et $\mathbb{E}(T)$ existe (ici, absolue convergence et convergence sont équivalentes).

2. Pour tout entier n,

$$\mathbb{P}(Y_n \geq 1) = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(Y_n = k) \leq \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{E}(Y_n) = m^n$$

On est dans le cas où la population s'éteint presque sûrement et on a donc $\mathbb{P}(T = -1) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k\geq 0} k(\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k))$$

Pour manipuler les sommes, revenons à des sommes partielles. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k)) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T > k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T > k) \\ &= \sum_{k=-1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(T > k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n\mathbb{P}(T > n)\end{aligned}$$

Comme $(T > n) = (Y_n > 1)$, on a $0 \leq n\mathbb{P}(T > n) \leq nm^n \to 0$ (car $m \in [0,1[$ et par croissances comparées). Un passage à la limite donne donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$$

On utilise à nouveau $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(Y_k \geq 1) \leq m^k$ pour en déduire que

$$\mathbb{E}(T) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{1}{1-m}$$

II.C

1. Comme on l'a dit en **III.A.3**, l'événement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Y_k = 0)$ est l'événement "la population finit par s'éteindre". Dans le cas $m \leq 1$, cet ensemble est de probabilité 1 (question **III.1.4**).

2.

a. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_n \geq Z_n$, $(Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k)$ et la suite $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{k\geq 0}$ est donc décroissante. Elle est minorée par 0 et converge donc d'après le théorème de limite monotone. D'après la propriété de continuité décroissante, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(Z_n \leq k)\right)$$

Si $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(Z_n \leq k)$ alors $\forall n,\ Z_n(\omega) \leq k$ et donc $Z(\omega) \leq k$ (passage à la limite). Réciproquement, si $Z(\omega) \leq k$ alors $\forall n,\ Z_n(\omega) \leq k$ (la suite croissante $(Z_n(\omega))_n$ est inférieure à sa limite) et donc $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(Z_n \leq k)$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}(Z \leq k)$$

b. On a $\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k-1)$ et donc (on passe à la limite)

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = \mathbb{P}(Z = k)$$

c. Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $s \in [0,1[$. On a (toutes les séries convergent absolument)

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &= \left|\sum_{k\geq K} (\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k))s^k\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)|s^k \end{aligned}$$

On découpe la somme. Pour les indices $\leq K$, on majore s^k par 1 (la somme est finie et cela ne pose pas de problème d'existence). Pour $k \geq K+1$, on remarque que $|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq 1$ (car les deux termes sont entre 0 et 1 et leur différence est donc entre -1 et 1). Comme $\sum(s^k)$ converge, on n'a à nouveau pas de problème d'existence. On obtient

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &\leq \sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \sum_{k\geq K+1} s^k \\ &= \sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s} \end{aligned}$$

Remarque : c'est un poil mieux que dans l'énoncé puisque $s \in [0,1[$.

d. Soit $s \in [0,1[$. Fixons $\varepsilon > 0$; comme $\frac{s^p}{1-s} \to 0$ quand $p \to +\infty$, on peut trouver un rang K pour lequel ce terme est $\leq \varepsilon/2$. K étant fixé, $\sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \to 0$ quand $n \to +\infty$ (somme d'un nombre constant de suites de limite nulle) et il existe un rang n_0 à partir duquel ce terme est aussi $\leq \varepsilon/2$. On a ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 /\ \forall n \geq n_0,\ |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n \to +\infty} G_{Z_n}(s) = G_Z(s)$$

Ceci reste vrai pour $s = 1$ (la suite est constante égale à 1). On a finalement (G_{Z_n}) qui converge simplement sur $[0,1]$ vers G_Z.

3.

a. On a $Z_1 = 1 + Y_1$ et comme une variable constante est indépendante de toute autre variable, la question **II.A.1** indique que

$$G_{Z_1}(s) = G_1(s) G_{Y_1}(s) = s f(s)$$

b. Avec le résultat admis et **III.C.2** on a (f étant continue)

$$\forall s \in [0,1],\ G_Z(s) = \lim_{n \to +\infty} G_{Z_n}(s) = s f(G_Z(s))$$

c. Le cours nous indique que Z est d'espérance finie si et seulementy si G_Z est dérivable en 1 et qu'alors $\mathbb{E}(Z) = G_Z'(1)$.
On sait qu'une fonction génératrice est dérivable sur $[0,1[$. La question précédente donne

$$\forall s \in [0,1[,\ G_Z'(s) = f(G_Z(s)) + G_Z'(s) f'(G_Z(s))$$

ce que l'on peut écrire

$$\forall s \in [0,1[,\ (1 - f'(G_Z(s))) G_Z'(s) = f(G_Z(s))$$

Quand $s \to 1$, $1 - f'(G_Z(s))) \to 1 - m$ et $f(G_Z(s)) \to f(1) = 1$ (les fonctions génératrices sont continues sur $[-1,1]$).
Si $m \in [0,1[$, on a donc $G_Z'(s) \to \frac{1}{1-m}$ quand $s \to 1$. D'après le théorème de limite de la dérivée (corollaire des accroissement finis et utilisable avec G_Z qui est continue sur $[0,1]$ et de classe C^1 sur $[0,1[$), G_Z est dérivable en 1 et $G_Z'(1) = \frac{1}{1-m}$.
Si $m = 1$, on a G_Z' de limite infinie en 1 et le même théorème indique que G_Z est non dérivable en 1.
Finalement, $\mathbb{E}(Z) < +\infty$ si et seulement si $m < 1$ et dans ce cas, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-m}$.

IV. Un exemple

Notons que l'énoncé est cohérent puisque les p_k vérifient les bonnes hypothèses (positifs, de somme 1 et avec un terme au mmoins d'indice > 1 qui est non nul).

IV.A On a

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}$$

f est dérivable sur $[0,1]$ avec $f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}$. En particulier,

$$m = f'(1) = 1$$

IV.B f est croissante sur $[0,1[$ (dérivée positive) et donc $f([0,1[) = [f(0), f(1)[= [0,1[$. Soit $t \in [0,1[$; comme $\varphi_0(t) = t \in [0,1[$ et $\varphi_{n+1}(t) = f(\varphi_n(t))$, une récurrence immédiate donne

$$\forall t \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(t) \in [0,1[$$

IV.C Le calcul donne

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{f(\varphi_n(t)) - 1} = \frac{2 - \varphi_n(t)}{-1 + \varphi_n(t)} = a_n(t) - 1$$

IV.D Il en découle que $a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1}$. Comme $\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{a_n(t)}$, on trouve que

$$\varphi_n(t) = \frac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}$$

IV.E $\mathbb{P}(Y_n = k)$ est le coefficient devant t^k dans le DSE de $\varphi_n(t)$. Or, pour $n \geq 1$, on a (à l'aide d'une division euclidienne non explicitée)

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{1+n-nt} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(1+n)}\frac{1}{1 - \frac{n}{1+n}t}$$

et donc (développement de $\frac{1}{1-u}$ et regroupement des termes constants)

$$\varphi_n(t) = \frac{n}{1+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}} t^k$$

On a ainsi prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{n}{1+n} \ \text{ et } \ \forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}$$

Comme $Y_0 = 1$, la formule reste valable dans le cas $n = 0$.

IV.F On a $(T > n) = (Y_n \geq 1)$ et donc

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On peut reprendre le calcul de **III.B.2** pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n\mathbb{P}(T > n)$$

$n\mathbb{P}(T > n) \to 1$ mais $\sum(\mathbb{P}(T > k))$ diverge (série de Riemann). Ainsi, T n'admet pas d'espérance finie (la série ne converge pas donc ne converge pas absolument ; notons qu'ici les notions coïncident puisque les termes sont positifs).

IV.G **III.C.3** donne une relation vérifiée par $x = G_Z(s)$: $x = \frac{s}{2-x}$. On trouve donc (résolution d'une équation de degré 2) que $G_z(s)$ vaut $1 \pm \sqrt{1-s}$. Mais $G_z(s) \leq 1$ quand $s \in [0,1[$ et donc

$$\forall s \in [0,1[,\ 1 - \sqrt{1-s}$$

Pour obtenir la loi de Z, on effectue un DSE de cette fonction et on identifie le coefficient de s^k comme $\mathbb{P}(Z = k)$:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 0 \ \text{ et } \ \forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(Z = k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - i\right) = \frac{1}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i-1) = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$$

V. Cas surcritique

V.A Les événements dont les $u_n^{(r)}$ sont les probabilités sont incompatibles (on ne peut voir arriver un événement pour la première fois à deux instants différents). $\sum(u_n^{(r)})$ est donc convergente (de somme ≤ 1). Pour tout $s \in [-1,1]$, on a donc $|u_n^{(r)} s^n| \leq u_n^{(r)}$ qui est terme général d'une série absolument convergente (et a fortiori convergente).

V.B

1. $W_1 = X_{0,1} + \cdots + X_{0,k}$. Si $W_1 \leq k$ alors il existe j tel que $X_{0,j} \leq 1$ c'est à dire
$$(W_1 \leq k) \subset \bigcup_{j=1}^{k} (X_{0,j} \leq 1)$$
En passant au complémentaire
$$\bigcap_{j=1}^{k} (X_{0,j} > 1) \subset (W_1 > k)$$
En passant aux probabilités, et comme les $X_{0,i}$ sont indépendantes,
$$(1 - p_0 - p_1)^k \leq \mathbb{P}(W_1 > k)$$
et donc
$$\mathbb{P}(W_1 > k) \geq (1 - p_0 - p_1)^k > 0$$
puisque $p_0 + p_1 \in [0, 1[$.
2. *JOKER au temps t.*

V.C

1. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq 2$.
Soit $\omega \in \Omega$ pour lequel la suite (W_p) prend la valeur k pour la r-ième fois exactement au rang n. Il existe un premier rang i où $W_i = k$ (et $i \leq n - r + 1$). A partir du moment où l'on retrouve une population de taille k, l'expérience reprend alors comme initialement de façon indépendante de ce qui s'est passé lors des étapes précédentes. On cherche alors les événement donnant pour la $r-1$-ième fois une population égale à k au bout de $n - i$ générations.
On partitionne ainsi l'événement dont on cherche la probabilité en $n - r - 1$ sous-ensembles disjoints. La probabilté du i-ème de ces sous-ensemble est $u_i u_{n-i}^{(r-1)}$.
On trouve finalement que
$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-r+1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$
Comme $u_a^{(b)}$ est nul si $a < b$ (on ne peut avoir b succès en strictement moins de b épreuves), on peut ajouter les termes d'indices $n - r + 2, \ldots, n - 1$ qui sont nuls et écrire que
$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$
2. En posant $u_0^{(r)} = 0$ pour tout $r \geq 1$ (et en particulier $u_0 = 0$), la relation précédente d'écrit aussi
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

La suite $u^{(r)}$ est alors le produit de Cauchy des suites u et u^{r-1}. Comme toutes les séries entières sont de rayon de convergence $\geq 1 > 0$, le cours nous indique que

$$\forall s \in]-1,1[,\ \sum_{n\geq 0} u_n^{(r)} s^n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n s^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} u_n^{(r-1)} s^n\right)$$

Comme les termes d'indice 0 sont nuls, on trouve finalement

$$\forall s \in]-1,1[,\ U_r(s) = U(s)U_{r-1}(s)$$

et ceci reste vrai pour $s = \pm 1$ par continuité des fonctions sur $[-1,1]$. Un récurrence immédiate donne alors

$$\forall r \geq 1,\ U_r = U^r$$

V.D

1. $U(1)$ correspond à la probabilité que $(W_n)_{n\geq 1}$ prenne au moins une fois la valeur k et on a donc

   $$U(1) = 1 - u \in [0,1[$$

   Notons E_r l'événement "la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ prend au moins r fois la valeur k". Si la suite prend au moins r fois la valeur k, il y a bien un rang où elle prend pour la r-ième fois la valeur k et réciproquement. Deux événement correspondant à des rangs différents sont bien sûr différents et ainsi

   $$\mathbb{P}(E_r) = \sum_{n\geq 1} u_n^{(r)} = U_r(1) = U(1)^r = (1-u)^r$$

   Les E_r formant une suite décroissante d'ensembles, la propriété de continuité décroissante indique (puisque $1 - u \in [0,1[$)

   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\geq 0} E_r\right) = \lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(E_r) = 0$$

   Or, $\bigcap_{r\geq 0} E_r$ correspond à l'événement "la suite (W_n) prend une infinité de fois la valeur k" et on a donc le résultat demandé.

2. Soit $k \geq 1$. On partitionne les événements en deux sous-ensembles A et $\overline{A}$: ceux pour lesquels on atteint la valeur k au moins une fois et les autres. On note B l'événement "la suite Y prend la valeur k une infinité de fois. Par formule des probabilités totales,

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap A)$$

   Plus précisément, notons A_i l'ensemble des événements correspondant à l'obtention d'une population k pour la première fois au rang i. Les A_i partitionnent A et

   $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

   La question précédente nous apprend que $\mathbb{P}(B|A_i) = 0$ (si on tombe sur une population de k individus, tout se passe ensuite comme dans l'expérience de cette partie) et finalement $\mathbb{P}(B) = 0$.

V.E Par continuité croissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right)$$

Or, on a

$$\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$$

et ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$$

On en déduit que (le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1$$

V.F Si la suite $(Y_n(\omega))$ tend vers $+\infty$ alors elle finit pas dépasser définitivement en temps fini toute valeur k, ce qui implique qu'elle ne prend aucune valeur une infinité de fois. Réciproquement, si cette propriété a lieu alors pour tout entier k_0 et pour $j \in [0, k_0 - 1]$, la valeur j n'est plus prise à partir d'un rang n_j ; à partir du rang $\max(n_0, \dots, n_{k_0+1})$, on a $Y_n(\omega) \geq k_0$ et on a donc montré que $Y_n(\omega) \to +\infty$ (définition d'une limite infinie). L'événement "la suite (Y_n) est de limite infinie" est donc égal à l'intersection des événements A_k : "la suite (Y_n) ne prend pas une infinité de fois la valeur k" et sa probabilité est

$$\beta = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

On a vu que les événements A_k pour $k \geq 1$ sont tous de probabilité 1. L'événement A_0 correspond, lui, à l'événement "la suite (Y_n) ne prend jamais la valeur 0" (prendre une fois la valeur 0 équivaut à prendre la valeur 0 à partir d'un certain rang) et sa négation est "la population finit par s'éteindre". On a donc $\mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$.
Pour se ramener à la question précédente, j'utilise la formule des probabilités composées :

$$\beta = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Les A_k, $k \geq 1$, étant de probabilité 1 pour la probabilité conditionnelle, on a ainsi

$$\beta = \mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$$