Centrale PSI 2
un corrigé

1 Etude du groupe orthogonal généralisé.

I.A.1 Δ_{p+1} est symétrique et donc
$$^t\Delta_{p+1}\Delta_{p+1}\Delta_{p+1} = \Delta_{p+1}^3$$

Un calcul par bloc donne alors
$$^t\Delta_{p+1}\Delta_{p+1}\Delta_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & (-I_p)^3 \end{pmatrix} = \Delta_{p+1}$$

On a donc
$$\Delta_{p+1} \in O(1,p)$$

Un calcul de déterminant bloc-diagonal donne aussi $\det(\Delta_{p+1}) = \det(-I_p) = (-1)^p$. Ainsi
$$\Delta_{p+1} \in O^+(1,p) \iff p \in 2\mathbb{N}^*$$

I.A.2 Soit $L \in O(1,p)$; le déterminant étant un morphisme multiplicatif invariant par transposition,
$$\det(L)^2 \det(\Delta_{p+1}) = \det(\Delta_{p+1})$$

Comme $\det(\Delta_{p+1}) \neq 0$, $\det(L)^2 = 1$ et donc $\det(L) = \pm 1$. Comme $L \in O(1,p)$, on a donc L qui est soit dans $O^+(1,p)$ soit dans $O^-(1,p)$. La réciproque étant immédiate,
$$O(1,p) = O^+(1,p) \cup O^-(1,p)$$

I.A.3 On utilise la caractérisation des sous-groupes.
- $I_{p+1} \in O(1,p)$ et cet ensemble est non vide.
- Si $L \in O(1,p)$ alors $\det(L) = \pm 1$ et donc L est inversible. On a ainsi $O(1,p) \subset GL_{p+1}(\mathbb{R})$.
- Soient $L, M \in O(1,p)$. On a $^t(LM) = {}^tM{}^tL$ et donc
$$^t(LM)\Delta_{p+1}LM = {}^tM{}^tL\Delta_{p+1}LM = {}^tM\Delta_{p+1}M = \Delta_{p+1}$$
  $O(1,p)$ est stable par produit.
- Soit $L \in O(1,p)$. On a
$$^tL^{-1}\Delta_{p+1}L^{-1} = {}^tL^{-1}{}^tL\Delta_{p+1}LL^{-1} = \Delta_{p+1}$$
  puisque $^tL^{-1} = ({}^tL)^{-1}$. $O(1,p)$ est stable par passage à l'inverse.

$O(1,p)$ est finalement un sous-groupe de $GL_{p+1}(\mathbb{R})$.
Comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, on montre de même que $O^+(1,p)$ est stable par produit et composition. Etant inclus dans $O(1,p)$ et non vide (il contient I_{p+1}), c'est un sous-groupe de $O(1,p)$.

I.A.4 Soit $L \in O(1,p)$. On a $\Delta_{p+1} = {}^tL\Delta_{p+1}L$. En passant à l'inverse (et comme Δ_{p+1} est sa propre inverse puisque $\Delta_{p+1}^2 = I_{p+1}$) on obtient
$$\Delta_{p+1} = L^{-1}\Delta_{p+1}{}^tL^{-1}$$

On multiplie à gauche par L et à droite par ^tL pour en déduire que
$$L\Delta_{p+1}{}^tL = \Delta_{p+1}$$

et conclure que $^tL \in O(1,p)$ (puisque $^t({}^tL) = L$).

I.A.5 L'application $M \mapsto {}^tM\Delta_{p+1}M$ est continue et $O(1,p)$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{\Delta_{p+1}\}$ par cette application continue.
De même, $M \mapsto \det(M)$ est continue et l'ensemble des matrices de déterminant 1 (resp. -1) est un fermé. Ainsi, $O^+(1,p)$ et $O^-(1,p)$ sont fermés comme intersection de deux fermés.

I.B.1 Avec des notations évidentes, on a

$$ {}^tXMY = \sum_{1\leq i,j\in n} x_i m_{i,j} y_j $$

Si cette quantité est nulle pour tous X, Y alors, c'est le cas pour $X = E_k$ et $Y = E_l$ en notant $(E_1, \dots, E_n)$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $m_{k,l} = 0$. Ceci étant vrai pour tous k, l, M est nulle. On en déduit (avec $M = A - B$) le résultat demandé.

I.B.2 Un développement par bilinéarité donne (avec le symétrie en plus)

$$ q_{p+1}(v+v') = q_{p+1}(v) + 2\varphi_{p+1,p+1}(v,v') + q_{p+1}(v') $$

$$ q_{p+1}(v-v') = q_{p+1}(v) - 2\varphi_{p+1,p+1}(v,v') + q_{p+1}(v') $$

En soustrayant ces relations, on en déduit (formule de polarisation) que

$$ \varphi_{p+1,p+1}(v,v') = \frac{1}{4}\left(q_{p+1}(v+v') - q_{p+1}(v-v')\right) $$

I.B.3 Il suffit de montrer trois implications.

- Supposons $L \in O(1,p)$. Soient $v, v' \in \mathbb{R}^{p+1}$; on a

$$ \varphi_{p+1}(f(v), f(v')) = {}^t(LV)\Delta_{p+1}(LV') = {}^tV({}^tL\Delta_{p+1}L)V' = {}^tV\Delta_{p+1}V' = \varphi_{p+1}(v,v') $$

- Supposons cette relation vraie pour tous v, v'. En choisissant $v = v'$, on obtient

$$ q_{p+1}(f(v)) = q_{p+1}(v) $$

- Supposons cette relation vraie pour tout v. Soient $v, v' \in \mathbb{R}^{p+1}$. En utilisant la relation avec $v + v'$ et $v - v'$ et avec la question **B.2** on a

$$ \begin{aligned} \varphi_{p+1}(f(v), f(v')) &= \frac{1}{4}\left(q_{p+1}(f(v)+f(v')) - q_{p+1}(f(v)-f(v'))\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(q_{p+1}(f(v+v')) - q_{p+1}(f(v-v'))\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(q_{p+1}(v+v') - q_{p+1}(v-v')\right) \\ &= \varphi_{p+1}(v,v') \end{aligned} $$

Matriciellement, ceci donne

$$ {}^t(LV)\Delta_{p+1}(LV') = {}^tV\Delta_{p+1}V' $$

ou encore

$$ {}^tV({}^tL\Delta_{p+1}L)^tV' = {}^tV\Delta_{p+1}V' $$

Comme ceci est vrai pour tous V, V', la question **B.1** indique que ${}^tL\Delta_{p+1}L = \Delta_{p+1}$ et donc que $L \in O(1,p)$.

I.B.4 On a $f(v) = w$ et $f(v') = w'$ avec

$$ w_i = \sum_{j=1}^{p+1} l_{i,j} v_j = l_{i,1} \quad \text{et} \quad w'_i = \sum_{j=1}^{p+1} m l_{i,j} v'_j = l_{i,2} $$

Les relations demandées s'écrivent donc

$$l_{1,1}l_{1,2} - \sum_{i=2}^{p+1} l_{i,1}l_{i,2} = v_1v_1' - \sum_{i=2}^{p+1} v_iv_i' = 0$$

$$l_{1,1}^2 - \sum_{i=2}^{p+1} l_{i,1}^2 = v_1^2 - \sum_{i=2}^{p+1} v_i^2 = 1$$

$$l_{1,2}^2 - \sum_{i=2}^{p+1} l_{i,2}^2 = (v_1')^2 - \sum_{i=2}^{p+1} (v_i')^2 = -1$$

Avec ${}^tL \in O(1,p)$, on obtient de même

$$l_{1,1}l_{2,1} - \sum_{i=2}^{p+1} l_{1,i}l_{2,i} = 0$$

$$l_{1,1}^2 - \sum_{i=2}^{p+1} l_{1,i}^2 = 1$$

$$l_{2,1}^2 - \sum_{i=2}^{p+1} l_{2,i}^2 = -1$$

2 Propriétés algébriques et géométriques du groupe $O^+(1,1)$.

II.A.1 Supposons que $a^2 - b^2 = 1$ et $a > 0$. Comme sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe θ tel que $b = \text{sh}(\theta)$ (ici, c'est la surjectivité qui sert). On a alors $a^2 = 1 - \text{sh}^2(\theta) = \text{ch}^2(\theta)$ et donc (les deux termes étant positifs) $a = \text{ch}(\theta)$.
Si θ' est un autre réel convenable alors $\text{sh}(\theta) = \text{sh}(\theta')$ et, par injectivité de sh, $\theta = \theta'$.
Il existe donc un unique θ réel convenable.

II.A.2 Un calcul élémentaire donne ${}^tL\Delta_2 L = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$L \in O(1,1) \iff \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \\ ab - cd = 0 \end{cases}$$

II.A.3 On conserve les notations précédentes. Supposons que $L \in O(1,1)$.

- $a = 0$ est exclus puisque sinon on aurait $c^2 = -1$.
- Si $a > 0$ alors comme $a^2 - c^2 = 1$, il existe γ tels que $(a,c) = (\text{ch}(\gamma), \text{sh}(\gamma))$. Par ailleurs, comme ${}^tL \in O(1,1)$ on a aussi $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ c^2 - d^2 = -1 \end{cases}$ et donc $b^2 = a^2 - 1 = \text{sh}^2(\gamma)$ et $d^2 = c^2 + 1 = \text{ch}^2(\gamma)$. Il existe donc $s_1, s_2 \in \{1, -1\}$ tels que $b = s_1\text{sh}(\gamma)$ et $d = s_2\text{ch}(\gamma)$. $ab = cd$ donne $(s_1 - s_2)\text{ch}(\gamma)\text{sh}(\gamma) = 0$.
  Si $\gamma = 0$ alors $L = \text{diag}(1, s_2)$ et comme $\det(L) > 0$, $s_2 = 1$. $L = \begin{pmatrix} \text{ch}(0) & \text{sh}(0) \\ \text{sh}(0) & \text{ch}(0) \end{pmatrix}$.
  Sinon, $\text{ch}(\gamma)\text{sh}(\gamma) \neq 0$ et donc $s_1 = s_2$. $\det(L) = s_1(\text{ch}^2(\gamma) - \text{sh}^2(\gamma)) > 0$ et donc $s_1 = 1$. Ainsi, $L = \begin{pmatrix} \text{ch}(\gamma) & \text{sh}(\gamma) \\ \text{sh}(\gamma) & \text{ch}(\gamma) \end{pmatrix}$.
- Si $a < 0$ alors $-a > 0$ et il existe γ tels que $(a,c) = (-\text{ch}(\gamma), \text{sh}(\gamma))$. On procède alors exactement de même pour montrer que $L = \begin{pmatrix} -\text{ch}(\gamma) & \text{sh}(\gamma) \\ \text{sh}(\gamma) & -\text{ch}(\gamma) \end{pmatrix}$.

Ceci montre l'inclusion directe. L'inclusion réciproque est une simple vérification des formules de la question précédente.

II.A.4 Les formules

$$\mathrm{ch}(\gamma+\gamma') = \mathrm{ch}(\gamma)\mathrm{ch}(\gamma') + \mathrm{sh}(\gamma)\mathrm{sh}(\gamma')$$
$$\mathrm{sh}(\gamma+\gamma') = \mathrm{sh}(\gamma)\mathrm{ch}(\gamma') + \mathrm{ch}(\gamma)\mathrm{sh}(\gamma')$$

donnent directement

$$L(\gamma)L(\gamma') = L(\gamma+\gamma')$$

D'après la question précédente,

$$O^+(1,1)\cap\tilde{O}(1,1) = \{L(\gamma)/\ \gamma\in\mathbb{R}\}$$

Cet ensemble est non vide, inclus dans $O^+(1,1)$, stable par produit (avec la relation de cette question) et par passage à l'inverse (car $L(\gamma)^{-1} = L(-\gamma)$ toujours avec la relation précédente et puisque $L(0) = I_2$). $O^+(1,1)\cap\tilde{O}(1,1)$ est ainsi un sous-groupe de $O^+(1,1)$. Il est commutatif car

$$L(\gamma)L(\gamma') = L(\gamma+\gamma') = L(\gamma'+\gamma) = L(\gamma')L(\gamma)$$

II.B. ch n'étant pas bornée, $O^+(1,1)\cap\tilde{O}(1,1)$ n'est pas borné et n'est donc pas compact.

II.C. $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres pour $L(\gamma)$ associés aux valeurs propres $\mathrm{ch}(\gamma)+\mathrm{sh}(\gamma)$ et $\mathrm{ch}(\gamma)-\mathrm{sh}(\gamma)$. Ils sont indépendants et forment donc une base de diagonalisation de $L(\gamma)$ (qui est ainsi diagonalisable). En normant ces vecteurs, on obtient une matrice de passage $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est dans $O(2)$ et telle que

$$\forall\gamma,\ {}^tPL(\gamma)P = P^{-1}L(\gamma)P = \mathrm{diag}(\mathrm{ch}(\gamma)+\mathrm{sh}(\gamma), \mathrm{ch}(\gamma)-\mathrm{sh}(\gamma))$$

On montre de même que

$$\forall\gamma,\ {}^tP\begin{pmatrix} -\mathrm{ch}(\gamma) & \mathrm{sh}(\gamma) \\ \mathrm{sh}(\gamma) & -\mathrm{ch}(\gamma) \end{pmatrix}P = \mathrm{diag}(-\mathrm{ch}(\gamma)+\mathrm{sh}(\gamma), -\mathrm{ch}(\gamma)-\mathrm{sh}(\gamma))$$

Finalement, P diagonalise toute matrice de $O^+(1,1)$.

II.D. Soient $L, L'\in O^+(1,1)$. ${}^tPLP$ et ${}^tPL'P$ sont diagonales et commutent donc. Comme $P^tP = P^tP = I_2$, on en déduit que

$${}^tPLL'P = {}^tPL'LP$$

et comme P est inversible, on trouve que $LL' = L'L$. Le groupe $O^+(1,1)$ est commutatif.

3 Décomposition standard d'un élément du groupe de Lorentz $O(1,3)$.

III.A. On utilise la question **I.B.4** pour obtenir

$$l_{1,1}^2 = 1 + \sum_{i=2}^4 l_{i,1}^2 \geq 1$$

III.B. On a

$$\ell''_{1,1} = \ell_{1,1}\ell'_{1,1} + \sum_{k=2}^4 \ell_{1,k}\ell'_{k,1}$$

Par ailleurs, la question **I.B.4** donne

$$\ell_{1,1}^2 = 1 + \sum_{k=2}^4 \ell_{k,1}^2 \quad\text{et}\quad {\ell'}_{1,1}^2 = 1 + \sum_{k=2}^4 {\ell'}_{k,1}^2$$

En posant $s = \sum_{k=2}^4 \ell_{k,1}^2$ et $s' = \sum_{k=2}^4 {\ell'}_{k,1}^2$, on a alors, puisque $\ell_{1,1}$ et $\ell'_{1,1}$ sont positifs,

$$\ell''_{1,1} = \sqrt{(1+s)(1+s')} + \sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1} > \sqrt{ss'} + \sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ donne

$$-\sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1} \leq \left| \sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1} \right| \leq \sqrt{ss'}$$

On en déduit finalement que

$$0 \leq \sqrt{\sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}^2}\sqrt{\sum_{k=2}^{4} {\ell'}_{1,k}^2} + \sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1} < \ell''_{1,1}$$

On a $LL' \in O(1,3)$ (car c'est un groupe) et $(LL')_{1,1} > 0$ et donc $LL' \in \tilde{O}(1,3)$. Cet ensemble est donc stable par produit. Il est aussi non vide (il contient I_4) et inclus dans $O(1,3)$. Pour conclure que c'est un sous-groupe, il nous reste à montrer qu'il est stable par passage à l'inverse.

III.C. Un produit par blocs montre que si R, R' sont des matrices inversibles alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & RR' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R^{-1} \end{pmatrix}$$

Comme $SO(3)$ est un groupe, on en déduit que G est stable par produit et passage à l'inverse. Il est aussi non vide (il contient I_4) et inclus dans $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ (qui est un groupe comme intersection de sous-groupes de $O(1,3)$). C'est finalement un sous-groupe de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$. Avec les relations du début de question $R \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}$ est un morphisme du groupe $(SO(3), *)$ dans le groupe $(G, *)$. Comme c'est clairement une bijection, c'est un isomorphisme de groupes.

III.D. Si $a = 0$ alors la question **I.B.4** montre que $\ell_{1,1}^2 = 1$ puis que $\ell_{1,2} = \ell_{1,3} = \ell_{1,4} = 0$ (la somme de leurs carrés valant 0). Comme, de plus, $\ell_{1,1} > 0$, il existe une matrice R telle que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}$. L'appartenance de L à $O^+(1,3)$ donne ${}^tRR = I_3$ et $\det(R) > 0$. Finalement $R \in SO(3)$ et $L \in G$.

III.E.1 *Dans l'optique de la question suivante, mieux vaut proposer une solution constructive et non théorique.*

Si $u = v$, l'identité (rotation d'angle nul) convient.

Sinon, si $v = -u$ alors un demi-tour d'axe une droite dirigée par un vecteur orthogonal à u convient.

Sinon, on note $w = u \wedge v$. C'est un vecteur orthogonal au plan $\mathrm{Vect}(u, v)$ (on est dans le cas (u, v) libre). On oriente ce plan, en orientant son orthogonal par w. On note alors θ l'angle entre u et v dans le plan orienté. La rotation d'axe dirigé et orienté par w et d'angle θ convient.

III.E.2 On calcule $\|U\|$ et $\|V\|$. Le cas où ils sont différents est facile, de même que celui où ils sont nuls ($R = I_3$ convient).

S'ils sont égaux, on les norme pour obtenir des vecteurs UU et VV. On calcule $W = UU \wedge VV$. Si $\|W\| = 0$ alors $UU = \pm VV$. Le cas $UU = VV$ est simple ($R = I_3$ convient). Dans le cas $UU = -VV$ est plus embêtant car pour appliquer la question précédente, on doit trouver un

vecteur orthogonal à UU. Il suffit de prendre l'un des vecteurs $E_i \wedge UU$ où (E_1, E_2, E_3) est la base canonique. A coup sur, deux de ces trois vecteurs sont non nuls. Notons alors W un tel vecteur. Il est orthogonal à UU et VV et on peut travailler avec ce nouveau vecteur comme dans le dernier cas.
Dans le dernier cas, on norme W pour obtenir WW. Dans la base $(WW, UU, WW \wedge UU)$, l'angle θ entre UU et VV est compris entre 0 et π et son cosinus vaut $c = UU.VV$. Son sinus vaut donc $\sqrt{1-c^2}$. On connaît la matrice d'une rotation convenable dans cette base et il suffit d'utiliser la formule de changement de base.
Ci-dessous, on suppose avoir chargé la librairie `linalg` pour avoir les fonctions `crossprod` et `dotprod` donnant produit vectoriel et produit scalaire.

```
rotation:=proc(U,V)
   nu:=sqrt(add(U[i]^2,i=1..3));
   nv:=sqrt(add(V[i]^2,i=1..3));
   if nu<>nv then RETURN(false) fi;
   if nu=0 then RETURN(diag(1,1,1)) fi ;
   UU:=U/nu;VV:=V/nv;
   W:=crossprod(U/nu,V/nv);
   nw:=sqrt(add(W[i]^2,i=1..3));
   if UU=VV then RETURN(diag(1,1,1)) fi;
   if nw=0 then
        W:=crossprod(UU,[1,0,0]);
        nw:=sqrt(add(W[i]^2,i=1..3));
        if nw=0 then
             W:=crossprod(UU,[0,1,0]);
             nw:=sqrt(add(W[i]^2,i=1..3));
             fi;
        fi;
   WW:=W/nw;
   P:=augment(WW,UU,crossprod(WW,UU));
   c:=dotprod(UU,VV);
   s:=sqrt(1-c^2);
   RETURN(evalm(P&*matrix(3,3,[1,0,0,0,c,-s,0,s,c])&*P^(-1)))
   end:
```

C'est bien compliqué...Mais il y a manifestement des cas à distinguer et je ne vois pas de façon immédiate une stratégie beaucoup plus efficace.

III.F.1 Il existe une rotation r telle que $r(a) = (\|a\|, 0, 0)$ d'après la question **III.E**. Notons R sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et posons $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}$. Un produit par blocs montre que

$$L_1 L = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} & \ell_{1,4} \\ \|a\| & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

le bloc non dessiné valant RB où $B = (\ell_{i,j})_{2 \le i,j \le 4}$. La matrice est donc de la forme voulue.

III.F.2 $L_1 L \in O(1,3)$ (structure de groupe). En travaillant comme à la question **I.B.4** avec la matrice $L_1 L$ (ou plutôt sa transposée) et les vecteurs $v = (0,0,1,0)$ et $v' = (0,0,1,0)$, on obtient les relations $\|v_2\|^2 = \|v_3\|^2 = 1$ et $(v_2|v_3) = 0$.

III.F.3 Un calcul par blocs donne cette fois

$$L_1 L L_2 = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & ?_{1,3} \\ \alpha & ?_{1,3} \\ 0 & {}^t v_2 R_2 \\ 0 & {}^t v_3 R_2 \end{pmatrix}$$

Comme (v_2, v_3) est une famille orthonormé, on peut la compléter en (v_1, v_2, v_3) b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$. L'unique application linéaire envoyant cette base sur la base canonique est une rotation (elle transforme une b.o.n.d en b.o.n.d). En notant R sa matrice dans la base canonique, on a $R \in SO(3)$ et $Rv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Rv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $R_2 = {}^t R$, qui est aussi un élément de $SO(3)$ ($R = R^{-1}$ et $SO(3)$ est un groupe), convient (c'est la matrice de l'endomorphisme envoyant la base canonique sur la base (v_1, v_2, v_3)).

III.F.4 En travaillant comme à la question **I.B.4** avec la matrice $L_1 LL2$ et les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient

$$\ell_{1,1}\beta_2 - \alpha\delta_2 = 0 \ \text{ et } \ \ell_{1,1}\beta_3 - \alpha\delta_3 = 0$$

$$\beta_2^2 - \delta_2^2 - 1 = -1 \ \text{ et } \ \beta_3^2 - \delta_3^2 - 1 = -1$$

Ainsi (comme $\ell_{1,1}$ et α sont > 0) β_i et δ_i ont même signe et même carré. On en déduit que

$$\beta_2 = \delta_2 \ \text{ et } \ \beta_3 = \delta_3$$

Toujours avec **I.B.4** on a aussi $\ell_{1,1}^2 - \alpha^2 = -1$ et donc $\ell_{1,1} \neq \alpha$. $\ell_{1,1}\beta_2 - \alpha\delta_2 = 0$ donne alors (avec $\beta_2 = \delta$) que $\beta_2 = \alpha_2 = 0$ et de même $\beta_3 = \alpha_3 = 0$.

III.G. Partons de $L \in O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ et distinguons deux cas.

- Si $a = 0$ (avec les notations précédentes) alors $L \in G$ et s'écrit donc $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}$ avec $R \in SO(3)$. En prenant $\gamma = 0$ et $R' = I_3 \in SO(3)$ on obtient l'identité voulue.
- Sinon, on peut trouver $L_1, L_2 \in G$ (et donc du type voulu) telles que

$$L_1 L L_2 = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$$

  Un calcul par bloc montre alors que $M = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \beta_1 \\ \alpha & \delta_1 \end{pmatrix} \in O(1,1)$. Comme $\det(L_1 L L_2) = \det(M)$ (déterminant bloc diagonal) on a même $M \in O^+(1,1)$ et comme $\ell_{1,1} > 0$, $M \in O^+(1,1) \cap \tilde{O}(1,1)$. M est donc de la forme $L(\gamma)$. On a finalement

$$L = L_1^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\gamma) & \mathrm{sh}(\gamma) & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}(\gamma) & \mathrm{ch}(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2^{-1}$$

  qui est une décomposition convenable puisque L_1^{-1} et L_2^{-1} sont dans G (qui est un groupe).

III.H. On suit la méthode précédente. Pour la définition de L_1, on a besoin de trouver une rotation, ce que `rotation` effectue. Pour trouver L_2, on a besoin de la rotation envoyant la base canonique sur la base orthonormée directe $(v_2, v_3, v_2 \wedge v_3)$ ce que l'on obtient immédiatement en mettant les vecteurs images en colonne. Notons enfin que pour inverser L_2 ou L_3, il suffit de transposer.

```
decompose:=proc(L)
   na:=sqrt(L[2,1]^2+L[3,1]^2+L[4,1]^2);
   if na=0 then
        RETURN(evalm(L),diag(1,1,1,1),diag(1,1,1,1)) fi;
   a:=[L[2,1],L[3,1],L[4,1]];
   R:=rotation(a,[na,0,0]);
   L1:=diag(1,1,1,1);
   for i from 1 to 3 do
     for j from 1 to 3 do L1[i+1,j+1]:=R[i,j] od od;
   M:=evalm(L1&*L);
   v2:=[M[3,2],M[3,3],M[3,4]];
   v3:=[M[4,2],M[4,3],M[4,4]];
   R2:=augment(crossprod(v2,v3),v2,v3);
   L2:=diag(1,1,1,1);
   for i from 1 to 3 do
     for j from 1 to 3 do L2[i+1,j+1]:=R2[i,j] od od;
   RETURN(transpose(L1),evalm(M&*L2),transpose(L2))
   end:
```

Un test avec `L:=matrix(4,4,[2,1,1,-1,1,1,1,0,1,1,0,-1,1,0,1,-1])` *s'avère probant.*

III.I. La décomposition n'est pas unique. Si $R \in SO(3)$ est la matrice d'un demi-tour alors en posant $L = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix}$ on a $LI_4L = I_4$. On trouve donc plusieurs décompositions de I_4 (puisqu'il y a plusieurs demi-tours).