Centrale PSI 2
un corrigé

Remarque préliminaire.

$M_p(\mathbb{K})$ est un espace de dimension finie où toutes les normes sont équivalentes. Si (A_n) est une suite d'éléments de $M_p(\mathbb{K})$, on n'a as besoin de préciser la norme quand on parle de convergence de (A_n). En particulier, si on choisit la "norme infinie relative à la base canonique", la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.

1 Question préliminaire.

A. Soit $z' = 1 + \frac{z}{n}$; on a $|z'|^2 = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}$ et on distingue plusieurs cas.
- Si $(a, b) = (-n, 0)$ alors $(1 + z/n)^n = 0$ est de module nul mais on ne définit pas son argument (ou, alternativement, son argument est quelconque).
- Si $a = -n$ et $b > 0$ alors $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\frac{b}{n}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}$. Comme $\left(\frac{b}{n}\right)^n > 0$, c'est la forme géométrique (avec le module et l'argument).
- Si $a = -n$ et $b < 0$ on écrit de même $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\frac{-b}{n}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{2}}$. Comme $\left(\frac{-b}{n}\right)^n > 0$, c'est la forme géométrique (avec le module et l'argument).
- Sinon, on a $z' = |z'|e^{i\theta_n}$ avec $\tan(\theta_n) = \frac{b}{n+a}$ et $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = |z'|^n e^{in\theta_n}$. Pour expliciter θ_n, on doit encore distinguer deux cas selon le signe de la partie réelle de z'.
  - Si $a > -n$ alors $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$.
  - Si $a < -n$ alors $\theta_n = \pi + \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$.

B. a, b étant fixé, pour n assez grand on a $a > -n$. Ainsi, en posant $r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}}$ et $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$ on a

$$\exists\, n_0 /\ \forall n \geq n_0,\ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} r_n^n = \left(1 + \frac{2a}{n} + O(1/n^2)\right)^{n/2} &= \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2a}{n} + O(1/n^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(a + O(1/n)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \exp(a) \end{aligned}$$

$$n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{bn}{a+n} \underset{n\to+\infty}{\to} b$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^a e^{ib} = e^z$$

2 Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

A.1 On pose $\beta_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}$. β_n est élément de $\mathbb{R}^{+*}$. De plus $\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{A}{n}\right)$ a ses deux colonnes normées et orthogonales et est donc dans $O_2(\mathbb{R})$. Comme son déterminant vaut 1, c'est même un élément de $SO_2(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) \in SO_2(\mathbb{R})$$

A.2 Comme $(1/\beta_n, \frac{\alpha}{n\beta_n})$ est sur le cercle unité, il existe un unique $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta_n) = \frac{1}{\beta_n} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_n) = \frac{\alpha}{n\beta_n}$$

et on a alors

$$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

Comme $\frac{1}{\beta_n} > 0$, on peut affirmer (comme en question $1.A$) que

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{\alpha}{n}\right)$$

A.3 On a alors (la composée de n rotations d'angle θ étant la rotation d'angle $n\theta$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(I_2 + \frac{A}{n}\right)^n = \beta_n^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}$$

Or, $\beta_n^n = \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln(1 + O(1/n^2))\right) = \exp\left(O(1/n)\right) \to 1$ et $n\theta_n \sim n\frac{\alpha}{n} \to \alpha$. Ainsi

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_2 + \frac{A}{n}\right)^n = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de rotation d'angle α.

B.1 B est une matrice antisymétrique d'ordre 3.

a) On a $\det(B) = \det({}^tB) = \det(-B) = (-1)^3\det(B) = -\det(B)$ et donc

$$\det(B) = 0$$

b) Soit $x \in \ker(u_B)^\perp$. On a

$$\forall y \in \ker(u_B),\ (u_B(x)|y) = {}^t(Bx)y = {}^tx{}^tBy = -{}^tx(By) = 0$$

et $u_B(x)$ est donc dans $\ker(u_B)^\perp$. On a montré que

$$u_B(\ker(u_B)^\perp) \subset \ker(u_B)^\perp$$

c) B n'étant pas inversible, elle est de rang ≤ 2. Supposons, par l'absurde, qu'elle soit de rang 1 ; par théorème du rang, $\ker(u_B)$ est alors de dimension 2 et son orthogonal est donc de dimension 1. Notons (e) une base $\ker(u_B)^\perp$. La stabilité prouvée ci-dessus indique qu'il existe un scalaire λ tel que $u_B(e) = \lambda e$. Calculons alors ${}^teBe = \lambda\|e\|^2$; cette quantité qui est réelle est égale à sa transposée et

$$\lambda\|e\|^2 = {}^t({}^teBe) = {}^te{}^tBe = -{}^teBe = -\lambda\|e\|^2$$

Comme $\|e\| \neq 0$, on obtient que $\lambda = 0$ et donc $e \in \ker(u_B)$. e doit être dans le noyau et son orthogonal et est non nul : c'est une contradiction.
Finalement

$$\operatorname{rg}(B) \in \{0, 2\}$$

B.2 Si $B=0$ alors le résultat demandé est immédiat avec $\beta=0$ et $P=I_3$. Sinon, B est de rang 2 et son noyau est de dimension 1. Notons e_1 un vecteur normé de ce noyau et complétons en une b.o.n. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. (e_2,e_3) est une base de $\ker(u_B)^\perp$ et cet espace est stable par u_B. On en déduit que dans $\mathcal{B}$, u_B est représentée par une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où $B'\in M_2(\mathbb{R})$. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Comme P est orthogonale (matrice de passage entre b.o.n.), $P^{-1}={}^tP$ et l'antisymétrie de B entraîne celle de B' qui est donc du type $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. On a ainsi (dans tous les cas)

$$\exists\, P\in O_3(\mathbb{R}),\ \exists\,\beta\in\mathbb{R}/\ B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

B.3 Comme $\mathrm{Tr}(UV)=\mathrm{Tr}(VU)$, on a alors $\mathrm{Tr}(PMP^{-1})=\mathrm{Tr}(P^{-1}PM)=\mathrm{Tr}(M)$ et

$$\|B\|_2^2 = -\mathrm{Tr}(B^2) = -\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}^2\right) = -\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = 2\beta^2$$

ou encore

$$|\beta| = \frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$$

B.4 On a tout d'abord

$$I_3+\frac{1}{n}B = P\left(I_3+\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}\right)P^{-1}$$

Comme $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$ (par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$) on en déduit que

$$\left(I_2+\frac{1}{n}B\right)^n = P\left(I_2+\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}\right)^n P^{-1}$$

Un calcul par blocs montre (toujours par récurrence sur k) que

$$\forall M\in M_2(\mathbb{R}),\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & M^k \end{pmatrix}$$

En notant $A=\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que

$$\left(I_3+\frac{1}{n}B\right)^n = P\begin{pmatrix} 1/n^n & 0 \\ 0 & (I_2+\frac{1}{n}A)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

La question 2.A (en ajoutant que $1/n^n\to 1$) donne $\begin{pmatrix} 1/n^n & 0 \\ 0 & (I_2+\frac{1}{n}A)^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\beta \end{pmatrix}$ avec $R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$. Enfin, $M\in M_3(\mathbb{R})\mapsto PMP^{-1}$ est linéaire et donc continue (on est en dimension finie) et ainsi

$$E(B) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_3+\frac{1}{n}B\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$E(B)$ est donc la matrice dans une bonne base (la base $\mathcal{B}$ mentionnée plus haut) de la rotation axiale d'axe dirigé par e_1 et d'angle $|\beta|$ (tant que l'axe n'est pas orienté, l'angle ne l'est pas non plus et est défini au signe près). Cet angle non orienté est donc égal à $\frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

3 Exponentielle de matrices diagonalisables.

A.1 Notons $d_1, \dots, d_p$ les coefficients diagonaux de D. On a $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(I_p + \frac{1}{n}D\right) = \text{diag}\left(1 + \frac{d_1}{n}, \dots, 1 + \frac{d_p}{n}\right)^n = \text{diag}\left((1 + \frac{d_1}{n})^n, \dots, (1 + \frac{d_p}{n})^n\right)$$

La question préliminaire indique que $(1 + \frac{d_k}{n})^n \to e^{d_k}$ et ainsi

$$E(D) = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_p})$$

$E(D)$ est diagonale à coefficients diagonaux non nuls et est donc inversible :

$$E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$$

A.2 Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de D deux à deux distinctes (chaque d_i est un λ_j). D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un (unique) $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré $\leq k-1$ tel que $\forall j,\ Q(\lambda_j) = e^{d_j}$. On a alors $\forall j,\ Q(d_j) = e^{d_j}$ et

$$Q(D) = \text{diag}(Q(d_1), \dots, Q(d_p)) = E(D)$$

A.3 Tout d'abord, E envoie bien les éléments de Δ dans $GL_p(\mathbb{K})$. De plus, si $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$ et $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_p)$ sont dans Δ, on a

$$\begin{aligned} E(A+B) &= E(\text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_p + b_p)) \\ &= \text{diag}(e^{a_1+b_1}, \dots, e^{a_p+b_p}) \\ &= \text{diag}(e^{a_1}e^{b_1}, \dots, e^{a_p}e^{b_p}) \\ &= \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_p})\text{diag}(e^{b_1}, \dots, e^{b_p}) \\ &= E(A)E(B) \end{aligned}$$

E est donc bien un morphisme de groupes de $(\Delta, +)$ dans $(GL_p(\mathbb{K}), \times)$.

B.1 Par hypothèse, il existe une matrice inversible $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et une matrice $D \in \Delta$ telles que $P^{-1}AP = D$. On a alors $I_p + \frac{1}{n}A = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)P^{-1}$. Comme $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$ (récurrence sur k) on en déduit que

$$\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1}$$

On vient de voir que $\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n \to E(D)$ et on sait que $M \to PMP^{-1}$ est continue. On en déduit que $E(A)$ existe et que

$$E(A) = PE(D)P^{-1}$$

B.2 Le déterminant étant un invariant de similitude, on a $\det(E(A)) = \det(E(D))$. En notant $d_1, \dots, d_p$ les coefficients diagonaux de D, on a

$$\det(E(D)) = \prod_{k=1}^{p} e^{d_k} = e^{\sum_{k=1}^{p} d_k} = e^{\text{Tr}(D)}$$

Enfin, la trace étant un invariant de similitude, D et A ont même trace et finalement

$$\det(E(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$$

B.3 On a encore $xI_p + A = P(xI_p + D)P{-}1$ et donc, par le même calcul ($xI_p + D$ étant diagonale)

$$E(xI_p + A) = PE(xI_p + D)P^{-1}$$

Avec le morphisme évoqué en 3.A.3, on a aussi $E(xI_p + D) = E(xI_p)E(D)$ et, avec 3.A.1, $E(xI_p) = e^x I_p$. Ainsi

$$E(xI_p + A) = P(e^x I_p E(D))P^{-1} = e^x PE(D)P^{-1} = e^x E(A)$$

C.1 Comme u_A et u_B commutent, tout sous-espace propre pour u_A est stable par u_B (c'est un résultat du cours). Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A deux à deux distinctes et $E_1, \dots, E_k$ les sous-espaces propres associés. E_j étant stable par u_B, u_B induit un endomorphisme v_j sur E_j. Or, la restriction à un sous-espace stable d'un diagonalisable est diagonalisable (autre résultat du cours) et v_j est donc diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}_j$ de E_j formée de vecteurs propres pour v_j et donc pour u_B. De plus, les éléments de $\mathcal{B}_j$ sont dans E_j et sont donc aussi des vecteurs propres pour u_A.
Comme A est diagonalisable, les E_j sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^p$ et la concaténation $\mathcal{B}$ des E_j est une base de $\mathbb{K}^p$. On a vu qu'elle est formée de vecteurs propres pour u_A ET u_B. Dans cette base, u_A et u_B sont représentés par des matrices diagonales.
Matriciellement, ceci signifie que si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ alors $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales

C.2 On a alors $P^{-1}(A+B)P$ qui est diagonale et $E(A+B)$ existe. De plus, en notant $D_A = P^{-1}AP$ et $D_B = P^{-1}BP$, on a $P^{-1}(A+B)P = D_A + D_B$ et

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_A + D_B)P$$

Toujours avec le morphisme de 3.A.3, on conclut que

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_A)E(D_B)P = P^{-1}E(D_A)PP^{-1}E(D_B)P = E(A)E(B)$$

Enfin, comme $D_A + D_B = D_B + D_A$, on peut reprendre ceci pour obtenir

$$E(A+B) = P^{-1}E(D_B)E(D_A)P = E(B)E(A)$$

4 Exponentielle de matrices nilpotentes.

A.1 Soit $j \in [1, k]$; si $x \in \ker(A^{j-1})$ alors $A^{j-1}x = 0$ et donc, en composant par A, $A^j x = A0 = 0$ ce qui montre que $x \in \ker(A^j)$. On a donc $\ker(A^{j-1}) \subset \ker(A^j)$.
Supposons, par l'absurde, que l'on ait une égalité. Soit alors $x \in \mathbb{C}^p$; on a $0 = A^k x = A^j A^{k-j} x$ et donc $A^{k-j}x \in \ker(A^j)$. Avec l'hypothèse faite, $A^{k-j}x \in \ker(A^{j-1})$ et donc $A^{k-1}x = 0$. Ceci étant vrai pour tout x, on a A^{k-1} ce qui est une contradiction avec l'hypothèse sur A.
Ainsi, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k$, $\ker(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\ker(A^j)$.

A.2 La suite $(\dim(\ker(A^j)))_{0 \leq j \leq k}$ est ainsi strictement croissante et on montre par récurrence que $\forall j \in [0, k],\ \dim(\ker(A^j)) \geq j$. Comme $\ker(A^k) \subset \mathbb{C}^p$, on a donc

$$k \leq \dim(\ker(A^k)) \leq p$$

B. Comme A et I_p, on peut utiliser la formule du binôme pour calculer $(I_p + A/n)^n$. Comme les puissances de A sont nulles à partir du rang k, il ne reste plus que k termes dans la somme (quand $n \geq k-1$:

$$\forall n \geq k-1,\ \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j$$

En remarquant que $\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} \sim_{n\to+\infty} \frac{n^j}{j!}$, on voit que $\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}A^j \to A^j/j!$ quand $n\to+\infty$. Ainsi $E(A)$ existe et

$$E(A) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}A^j$$

Si A est triangulaire supérieure stricte alors son polynôme caractéristique est $(-X)^p$. Par théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^p = 0$ et A est nilpotente. On obtient $E(A)$ avec la formule précédente (en remplaçant k par p ce qui ajoute d'éventuels termes nuls).
En utilisant les fonction `diag` et `rowdim` (pour obtenir la taille de la matrice) de la librairie `linalg`, on obtient la fonction Maple suivante.

```
E:=proc(A)
  p:=rowdim(A);
  M:=diag(1$p);  #pour stocker les puissances successives de A
  S:=diag(0$p);  #pour stocker les sommes partielles
  for i from 0 to p-1 do
    S:=evalm(S+M/i!);
    M:=evalm(M&*A);
    od;
  return(evalm(S))
  end:
```

C. C'est la formule obtenue ci-dessus. $Q = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X^j}{j!}$ convient.

D. $I_p + \frac{B}{n}$ et $\frac{A}{n}$ commutent et la formule du binôme donne

$$\begin{aligned}\left(I_p + \frac{A+B}{n}\right)^n &= \left(I_p + \frac{B}{n} + \frac{A}{n}\right)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\frac{A^j}{n^j}\left(I_p + \frac{B}{n}\right)^{n-j}\end{aligned}$$

Comme $A^k = 0$, les termes d'indice $\geq k$ dans la somme sont nuls et il reste

$$\forall n \geq k-1,\ \left(I_p + \frac{A+B}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n^j}\binom{n}{j}A^j\left(I_p + \frac{B}{n}\right)^{n-j}$$

On a déjà vu que $\frac{1}{n^j}\binom{n}{j} \to 1/j!$ quand $n\to+\infty$. L'énoncé admet que $\left(I_p + \frac{B}{n}\right)^{n-j} \to E(B)$. Comme il y a un nombre constant (indépendant de n) de termes, les théorèmes d'opération donnent

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{A+B}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}A^jE(B)$$

Avec la formule vue plus haut pour $E(A)$, on a donc $E(A+B)$ qui existe et

$$E(A+B) = E(A)E(B)$$

E. On utilise la formule précédente avec $B = xI_p$ (qui commute avec A et telle que $E(xI_p) = e^xI_p$) ce qui donne

$$\forall x\in\mathbb{C},\ E(xI_p + A) = E(A)E(xI_p) = e^xE(A)$$

F. A étant nilpotente elle est annulée par X^k qui est scindé. Ainsi, A est trigonalisable et 0 est son unique valeur propre. Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$ soit triangulaire supérieure stricte. On a alors $A^j = PT^jP^{-1}$ et (en utilisant la fomule vue plus haut pour $E(A)$ valable aussi pour $E(T)$ car T est nilpotente aussi)

$$E(A) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A^j}{j!} = P \sum_{j=0}^{p-1} \frac{T^j}{j!} P{-1} = PE(T)P^{-1}$$

ou encore $E(A) - I_p = P(E(T) - I_p)P^{-1}$. $E(A) - I_p$ est donc semblable à

$$E(T) - I_p = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{T^j}{j!}$$

Les T_j pour $j \geq 1$ étant strictement triangulaires supérieures, $E(T) - I_p$ l'est aussi. $E(T) - I_p$ est donc nilpotente (voir 4.B) et $E(A) - I_p$ l'est donc aussi (le caractère nilpotent est un invariant de similitude).

5 Cas général.

A.1 A étant dans $M_p(\mathbb{C})$, χ_A est un polynôme de degré p (de coefficient dominant $(-1)^p$) et le résultat demandé est celui de la division euclidienne de P_n par χ_A.

A.2 Comme $P \in \mathbb{C}[X] \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbre, on a $P_n(A) = Q_n(A)\chi_A(A) + R_n(A)$. Or, le théorème de Cayley-Hamilton indique que χ_A annule A et ainsi

$$P_n(A) = \left(I_p + \frac{1}{n}A\right) = R_n(A)$$

$E(A)$ existe donc ssi $(R_n(A))$ converge (et est alors égal à sa limite).

A.3 Fixons $x \in \mathbb{C}$ et $q \in [1, p]$. Supposons que $\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i(xI_q + J_q)^i = 0$. Par formule du binôme, on peut développer $(xI_q + J_q)^i$ puisque I_q et J_q commutent. On obtient alors, en inversant les sommes

$$0 = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i(xI_q + J_q)^i = \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{i=j}^{q-1} \binom{i}{j} \alpha_i x^{i-j} \right) J_q^j$$

On montre que $J_q^j = \sum_{k=1}^{p-j} E_{k,k+j}$ (la diagonale de 1 remonte quand la puissance augmente). La nullité de la matrice ci-dessus se traduit donc par

$$\forall j \in [0, q-1], \ \sum_{i=j}^{q-1} \binom{i}{j} \alpha_i x^{i-j} = 0$$

Pour $j = q - 1$, on obtient $\alpha_{q-1} = 0$. Pour $j = q - 2$ on obtient alors $\alpha_{q-2} = 0$ et on poursuit ainsi pour montrer la nullité de tous les α_i (de manière plus rigoureuse, on mène une récurrence descendante sur i pour montrer cette nullité). On en déduit que la famille proposée est libre.

A.4 $B - XI_p$ est diagonale par bloc et on peut utiliser la formule des déterminants bloc-diagonaux pour obtenir

$$\chi_B(x) = \prod_{j=1}^{k} \det((\lambda_j - X)I_{n_j} + J_{n_j})$$

$(\lambda_j - X)I_{n_j} + J_{n_j}$ est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. Ainsi,

$$\chi_B(x) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - X)^{n_j}$$

χ_B possède donc les même racines complexes que χ_A avec les mêmes ordres de multiplicité. Comme les deux polynômes ont même coefficient dominant $(-1)^p$, on a donc

$$\chi_B = \chi_A$$

B.1 On sait que l'on peut faire du calcul par blocs avec les matrices pourvu que les tailles des blocs le permettent. En particulier si $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_k)$ et $M' = \text{diag}(M'_1, \dots, M'_k)$ avec M_i et M'_i qui dont des blocs carrés de même taille, alors $MM' = \text{diag}(M_1M'_1, \dots, M_kM'_k)$. En itérant cette propriété, on a $M^j = \text{diag}(M_1^j, \dots, M_k^j)$ pour tout entier naturel j. Ceci donne directement le résultat demandé.

B.2 a) En combinant linéairement les égalités de la question précédente, on obtient que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(B) = \text{diag}(P(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}), \dots, P(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}))$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et qui annule B. Il existe des $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et un polynôme Q dont aucun des λ_i n'est racine tels que

$$P = Q(X)\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Comme aucune des racines complexes de Q n'est valeur propre de A, $Q(A)$ est inversible et donc $\tilde{P} = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ annule aussi A ($0 = P(A) = \tilde{P}(A)Q(A)$ et on peut multiplier par $Q(A)^{-1}$ qui est inversible).

$\tilde{P}$ annulant B, il annule chaque $\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}$. Comme λ_j est l'unique valeur propre de $\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}$ (matrice triangulaire dont on lit les valeurs propres sur la diagonale) on va obtenir comme ci-dessus que $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ annule $\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}$ c'est à dire que X^{α_j} annule J_{n_j}. Avec le calcul fait plus haut des puissances de J_{n_j}, on obtient que $\alpha_i \geq n_i$.

Finalement, $\tilde{P}$ est de degré $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq n_1 + \dots + n_k = p$ et c'est a fortiori le cas pour P.

On a montré qu'un polynôme annulateur non nul de la matrice B est de degré $\geq p$.

b) Supposons $\sum_{i=0}^{p-1} \beta_i B^i = 0$; $\sum_{i=0}^{p-1} \beta_i X^i$ annule donc B et est dans $\mathbb{C}_{p-1}[X]$. Avec la question précédente, c'est le polynôme nul et les β_i sont nuls. Ceci signifie que la famille $\{B^i,\ 0 \leq i \leq p-1\}$ est libre.

B.3 Comme expliqué plus haut, on a

$$P_n(B) = \text{diag}(P_n(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}), \dots, P_n(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}))$$

Comme chaque J_{n_j} est nilpotente, on peut utiliser la partie 4 pour dire que $P_n(\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}) \to e^{\lambda_j} E(J_{n_j})$. Ainsi, $(P_n(B))$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(B) = \text{diag}(e^{\lambda_1} E(J_{n_1}), \dots, e^{\lambda_k} E(J_{n_k}))$$

B.4 Comme $\chi_A = \chi_B$ alors on a $P_n = Q_n\chi_B + R_n$ et on sait donc que $(R_n(B))$ converge. On veut en déduire que $(R_n(A))$ converge. R_n étant dans $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ peut s'écrire

$$R_n = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(n) X^k$$

et on a

$$R_n(B) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(n) B^k$$

La famille $(B^i)_{0\leq i\leq p-1}$ étant libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. $(R_n(B))$ étant convergente, elle l'est (on est en dimension finie où toutes les normes sont équivalentes) au sens de la norme infinie associée à $\mathcal{C}$. Ceci revient à dire que les suites coordonnées dans cette base sont convergentes (dans $\mathbb{C}$). Ainsi, pour tout $i \in [0, p-1]$, la suite $(\alpha_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $\gamma_i \in \mathbb{C}$ sa limite. On a alors

$$R_n(A) \to \sum_{k=0}^{p} \gamma_k A^k$$

et on a prouvé la convergence voulue.