Centrale PSI 1
un corrigé

1 Questions préliminaires.

A.1. La fonction G_x étant de classe C^1 par morceaux et continue, les trois théorèmes de convergence des séries de Fourier s'appliquent. En particulier, la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ mais aussi en moyenne quadratique vers G_x. La convergence normale entraînant la convergence simple, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_x(t) = e^{ix\sin(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)e^{int}$$

A.2. Le cours nous donne une relation entre les coefficients de Fourier exponentiels $c_n(f)$ et $c_n(f')$ d'une fonction de classe C^1 et de sa dérivée. Retrouvons cette relation par une intégration par parties.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ 2\pi c_n(f') = \left[f(t)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = inc_n(f)$$

Ici, G_x est de classe C^∞ et on montre par récurrence (sur k) que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(G_x^{(k)}) = (in)^k c_n(G_x)$$

Comme $G_x^{(k)}$ est continue, $c_n(G_x^{(k)}) \to 0$ quand $n \to \pm\infty$ et ceci pour tout k. On en déduit donc que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\varphi_n(x)| = |c_n(G_x)| = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{quand} \quad n \to \pm\infty$$

B. Le changement de variable $u = -x$ (licite puisque $x \mapsto -x$ est de classe C^1 sur le segment $[-\pi, \pi]$) donne

$$2\pi\varphi_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G_x(-u)e^{inu}\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G_x(u)e^{-inu}}\,du = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} G_x(u)e^{-inu}\,du} = 2\pi\overline{\varphi_n(x)}$$

Les complexes égaux à leur conjugué étant les réels, on a prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi_n(x) \in \mathbb{R}$$

C. On a $\forall t \in \mathbb{R},\ G_x(t+\pi) = \overline{G_x(t)}$. Le changement de variable affine $u = t - \pi$ donne

$$2\pi\varphi_n(x) = (-1)^n \int_{-2\pi}^{0} G_x(u+\pi)e^{-inu}\,du = (-1)^n \int_{-2\pi}^{0} \overline{G_x(u)e^{inu}}\,du = 2\pi(-1)^n\overline{\varphi_{-n}(x)}$$

On a utilisé le fait que quand on intègre une fonction 2π-périodique sur un intervalle de longueur 2π, la valeur obtenue ne dépend pas de la position de l'intervalle.
Comme $\varphi_{-n}(x)$ est un réel, on a donc

$$\varphi_n(x) = (-1)^n\varphi_{-n}(x)$$

Par ailleurs,

$$2\pi\varphi_n(-x) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G_x(t)}e^{-inu}\,du = 2\pi\overline{\varphi_{-n}(x)}$$

et toujours avec le fait que $\overline{\varphi_{-n}(x)}$ est réel, $\varphi_n(-x) = \varphi_{-n}(x)$. Finalement, on a bien

$$\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x) = \varphi_{-n}(x)$$

La première égalité montre que φ_n a la parité de n (fonction paire/impaire si n est un entier pair/impair).

D. D'après la formule de Parseval,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G_x(t)|^2\ dt = 1$$

2 Forme intégrale et développement en série entière.

A. Il suffit de majorer grossièrement (par "positivité de l'intégrale") :

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G_x(t)e^{-int}|\ dt = 1$$

B. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a

$$2\pi\varphi_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix\sin(t))^k}{k!}e^{-int}\ dt$$

On aimerait intervertir les symboles somme et intégrale.

- On note $f_k\ :\ t \mapsto \frac{(ix\sin(t))^k}{k!}e^{-int}$. La suite (f_k) est composée de fonctions continues et l'identité précédente indique que $\sum(f_k)$ converge simplement sur $[-\pi,\pi]$, de limite simple $t \mapsto G_x(t)e^{-int}$ qui est continue sur $[-\pi,\pi]$.
- On a $\forall t \in [-\pi,\pi],\ |f_n(t)| \leq \frac{|x|^k}{k!}$ et donc $\|f_n\|_{\infty,[-\pi,\pi]} \leq \frac{|x|^k}{k!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.

Comme $[-\pi,\pi]$ est un segment, on est dans le cas où l'interversion est licite. Elle donne

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}I_{n,k}\quad\text{avec}\quad I_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i^k e^{-int}(\sin(t))^k\ dt$$

C.1. D'après la formule d'Euler,

$$\sin^k(t) = \frac{1}{2i}^k(e^{it}-e^{-it})^k = \frac{1}{2^k i^k}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^{k-m}e^{imt}e^{-i(k-m)t} = \frac{1}{2^k i^k}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^{k-m}e^{i(2m-k)t}$$

En injectant cette expression dans celle de $I_{n,k}$ on trouve

$$I_{n,k} = \sum_{m=0}^{k}\frac{A_{m,k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(2m-k-n)}\ dt\quad\text{avec}\quad A_{m,k} = \frac{(-1)^{k-m}}{2^k}\binom{k}{m}$$

C.2. Si $N \in \mathbb{Z}$ alors $\int_{-\pi}^{\pi} e^{iNt}\ dt = 2\pi\delta_{N,0}$. On en déduit que dans la somme ci-dessus, le seul terme pouvant être non nul est celui qui correspond à une valeur de m telle que $2m = k+n$. Distinguons trois cas.

- Si $k+n$ est impair (ce qui équivaut à $k-n$ impair) alors aucune valeur de m ne convient et $A_{n,k} = 0$.
- Si $k+n \notin [0,2k]$ c'est à dire $n \notin [-k,k]$ c'est à dire $n > k$ (puisque $n \in \mathbb{N}$) alors aucune valeur de m ne convient et $A_{n,k} = 0$.
- Si $k+n$ est pair et $n \in [0,k]$ alors il existe $p \geq 0$ tel que $k = n+2p$ et $m = n+p$ est la seule valeur de m qui peut donner un terme non nul. De plus, le terme pour $m = n+p$ vaut $\frac{A_{n+p,n+2p}}{2\pi}.2\pi = \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}}\binom{n+2p}{n+p}$.

Tout ceci nous donne les formules annoncées.

C.3. On revient à l'expression obtenue en question B :

$$\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{n+2p}}{(n+2p)!} \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}} \binom{n+2p}{n+p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}$$

On a ici une série entière "lacunaire" (toutes les puissances entières de x n'y sont pas mais il n'y a que des puissances entières et chacune n'apparaît qu'une fois). La formule étant valable pour tout x, le rayon de convergence est infini.

C.4. φ_n est ainsi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (une série entière de rayon R a une somme infiniment régulière sur $]-R, R[$) et on obtient ses dérivées en dérivant "terme à terme".

D. En utilisant la dérivation terme à terme évoquée ci-dessus, on obtient

$$x\varphi_n'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} (n+2p)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} x\varphi_n'(x) + n\varphi_n(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} (2n+2p) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} 2 \\ &= x\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n-1+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2p} \\ &= x\varphi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Il reste à multiplier par x^{n-1} pour en déduire

$$\frac{d}{dx}(x^n\varphi_n(x)) = x^n\varphi_{n-1}(x)$$

E.1. Comme $x > 0$, les termes de la suite a_p sont > 0 et on peut former

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{x^2}{4(p+1)(n+p+1)}$$

Toujours par positivité des a_k, on cherche les entier p tels que ce quotient soit ≤ 1 (n et x fixés), c'est à dire tels que $4p^2+4(n+2)p+4(n+1)-x^2 \geq 0$. Les solutions de cette équation du second degré de l'inconnue p sont $-\frac{n+2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2+n^2}$. La suite est finalement décroissante à partir du rang

$$p_0 = \left\lceil \frac{\sqrt{x^2+n^2}-n-2}{2} \right\rceil$$

où $\lceil t \rceil$ est le plus petit entier plus grand que t.

E.2. A partir du rang p_0, la suite est alternée et décroissante en module et de limite nulle (c'est le terme général d'une série convergente...). La règle spéciale s'applique et indique que

$$\forall N \geq p_0, \left|\sum_{p\geq N+1} (-1)^p a_p\right| \leq |a_{N+1}| = \frac{1}{(N+1)!(n+N+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2N+2}$$

Comme $\varphi_n(x) = S_N(x) + R_N(x)$, on a donc

$$\forall N \geq p_0,\ |\varphi_n(x) - S_N| \leq |a_{N+1}| = \frac{1}{(N+1)!(n+N+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2N+2}$$

Pour que $|\varphi_n(x) - S_N| \leq \varepsilon$, il est donc suffisant que

$$|a_{N+1}| = \frac{1}{(N+1)!(n+N+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2N+2} \leq \varepsilon$$

E.3. L'énoncé nous demande de calcul les a_p récursivement. La formule permettant ce calcul est

$$\forall p \geq 0,\ a_{p+1} = a_p \frac{x^2}{4(p+1)(n+p+1)}$$

Le calcul se fait en deux temps.
- On commence par calculer S_{p_0} (première boucle) ;
- on continue à additionner des termes jusqu'à avoir $a_p \leq \varepsilon$ (et donc tant que $a_p > \varepsilon$.

Ici, on définit une constante p_0 qui corresponda au seuil pour la première boucle. On gère trois variables `p`, `a` et `s`. Dans `a`, il y a les valeurs successives de a_p et dans `s`, celles de S_p.

```
CalculPhi:=proc(n,x,eps)
  p0:=(sqrt(x^2+n^2)-n-2)/2;
  p:=0;
  a:=(1/n!)*(x/2)^n;
  s:=a;
  while p<p0+1 do
     a:=a*x^2/(4*(p+1)*(n+p+1));
     p:=p+1;
     s:=s+(-1)^p*a
     od;
  while a>eps do
     a:=a*x^2/(4*(p+1)*(n+p+1));
     p:=p+1;
     s:=s+(-1)^p*a
     od;
  return(s)
  end:
```

3 Equation différentielle et étude de φ_n quand $x \to +\infty$.

A.1. Comme on l'a noté plus haut, on peut dériver terme à terme l'expression de φ_n pour obtenir

$$x\varphi_n'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}(n+2p)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}$$

$$x^2\varphi_n''(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}(n+2p)(n+2p-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}$$

On en déduit que

$$x^2\varphi_n''(x) + x\varphi_n'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}(n+2p)^2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \qquad (*)$$

Par ailleurs, un changement d'indice ($k = p+1$) donne

$$x^2\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \qquad (**)$$

et enfin on a

$$-n^2\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p!(n+p)!} n^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \qquad (***)$$

Quand on additionne les trois relations précédentes, on particularise le terme d'indice 0 qui vaut

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n \left(\frac{n}{n!} + \frac{n(n-1)}{n!} - \frac{n^2}{n!}\right) = 0$$

Pour un $p \geq 1$, on obtient par ailleurs un terme qui vaut

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \left(\frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}((n+2p)^2 - n^2) + 4\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!(n+p-1)!}\right)$$

et en remarquant que $(n+2p)^2 - n^2 = 4p(n+p)$, on voit que ces termes sont tous nuls. Finalement, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2\varphi_n''(x) + x\varphi_n'(x) + (x^2 - n^2)\varphi_n(x) = 0$$

A.2. z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de telles fonctions. De plus comme $y(x) = z(x)/\sqrt{x}$, on a

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\frac{z(x)}{x^{3/2}} + \frac{z'(x)}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad y''(x) = \frac{3}{4}\frac{z(x)}{x^{5/2}} - \frac{z'(x)}{x^{3/2}} + \frac{z''(x)}{\sqrt{x}}$$

En injectant dans (3.1) et en divisant par $x^{3/2}$ on obtient

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0 \ \text{ avec } \ q(x) = \frac{1}{4x^2} + 1 - \frac{n^2}{x^2}$$

On voit alors immédiatement que

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = 1$$

A.3. (3.2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 résolue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ (coefficient de z'' égal à 1) et à coefficients continus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et indique que

- l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ est un espace vectoriel de dimension 2 ;
- pour tout $(x_0, a) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution z sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $z(x_0) = a$ et $z'(x_0) = a$.

En particulier, si z est une solution pour laquelle $z(x_0) = z'(x_0) = 0$ alors z est la solution nulle (puisqu'il y a unicité et que la solution nulle convient). On en déduit que pour toute solution non nulle z et tout $x > 0$, $(z(x), z'(x)) \neq (0, 0)$ (en contraposant).
Soit $\alpha > 0$ un zéro de z (solution non nulle). On a alors $z'(\alpha) \neq 0$. Par continuité de z', il existe un intervalle $]\alpha-\eta, \alpha+\eta[$ (avec $\eta > 0$) sur lequel z' ne s'annule pas et est donc de signe constant > 0 ou < 0. Sur cet intervalle, z est strictement monotone et ne s'annule donc qu'en α.

A.4. φ_n étant solution de (3.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui précède montre que les zéros de $\sqrt{x}\varphi_n(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont isolés. Et comme $\sqrt{x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a aussi que les zéros de $\varphi_n(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont isolés.

B.1. L'équation différentielle $y'' + y = g$ est linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\pm i$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\text{Vect}(\cos, \sin)$. Pour que $c_1\cos + c_2\sin$ soit solution, il suffit que

$$\forall x > 0,\ \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

ou encore que

$$\forall x > 0,\ c_1'(x) = -\sin(x)g(x) \ \text{ et } \ c_2'(x) = \cos(x)g(x)$$

g étant continue, il suffit d'après le théorème fondamental de choisir

$$\forall x > 0,\ c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \sin(t)g(t)\ dt \ \text{ et } \ c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \cos(t)g(t)\ dt$$

Finalement, une solution particulière est $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \sin(x-t)g(t)\ dt$ et la solution générale est

$$x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \int_{x_0}^{x} \sin(x-t)g(t)\ dt$$

Si z est solution de (3.3) alors elle est solution de l'équation précédente avec $g(x) = -\frac{z(x)}{x^2}$. Ainsi, il existe des constantes A et B telles que

$$\forall x > 0,\ z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - \lambda\int_{x_0}^{x} z(t)\sin(x-t)\frac{dt}{t^2}$$

ce qui correspond à l'expression demandée par imparité du sinus.

B.2.a Pour $x \geq x_0$, les bornes dans l'intégrale ci-dessus sont dans le bon sens et on a

$$\forall x \geq x_0,\ |z(x)| \leq |A| + |B| + |\lambda|\int_{x_0}^{x} \frac{|z(t)|}{t^2}\ dt = |A| + |B| + |\lambda|h(x)$$

Par ailleurs, comme $u \mapsto \frac{|z(u)|}{u^2}$ est continue, le théorème fondamental indique que $h'(x) = \frac{|z(x)|}{x^2}$. En divisant par $x^2 > 0$, on a donc

$$h'(x) - \frac{\mu}{x^2}h(x) \leq \frac{M}{x^2} \ \text{ avec } \ \mu = |\lambda|,\ M = |A| + |B|$$

B.2.b Multiplier par $e^{\mu/x}$ ne change pas le sens de l'inégalité et on a donc

$$\forall x \geq 0,\ h'(x)e^{\mu/x} - \frac{\mu}{x^2}h(x)e^{\mu/x} \leq \frac{M}{x^2}e^{\mu/x}$$

Dans le membre de gauche, on reconnaît la dérivée de $x \mapsto h(x)e^{\mu/x}$. En intégrant l'inégalité (possible par positivité de l'intégrale quand $x \geq x_0$)

$$\forall x \geq x_0,\ h(x)e^{\mu/x} \leq h(x_0)e^{\mu/x_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{u^2}e^{\mu/u}\ du$$

Comme $\mu > 0$, $x \mapsto \frac{M}{u^2}e^{\mu/u}$ est intégrable sur $[x_0, +\infty[$ (continue et dominée par $1/u^2$ au voisinage de l'infini) et ainsi (la majoration est correcte puisque la fonction intégrée est positive)

$$\forall x \geq x_0,\ h(x)e^{\mu/x} \leq h(x_0)e^{\mu/x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{M}{u^2}e^{\mu/u}\ du$$

ce qui nous montre que h est bornée sur $[x_0, +\infty[$ (le membre de droite est indépendant de x).

B.3. Comme $u \mapsto 1/u^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, il est licite d'écrire

$$\forall x \geq x_0,\ \left|\int_{x}^{+\infty} z(u)\sin(u-x)\frac{du}{u^2}\right| \leq \|z\|_{\infty,[x_0,+\infty[}\int_{x}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \|z\|_{\infty,[x_0,+\infty[}\frac{1}{x}$$

et on a donc

$$\int_{x}^{+\infty} z(u)\sin(u-x)\frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de l'infini (le quotient est borné sur $[x_0, +\infty[$).
On reprend l'expression de $3.b.1$ en l'écrivant

$$\begin{aligned} z(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) + \lambda \int_{x_0}^{+\infty} z(u)\sin(u-x)\frac{du}{u^2} - \lambda \int_{x}^{+\infty} z(u)\sin(u-x)\frac{du}{u^2} \\ &= A\cos(x) + B\sin(x) + \lambda \int_{x_0}^{+\infty} z(u)\sin(u-x)\frac{du}{u^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Les fonctions $u \mapsto \frac{z(u)\sin(u)}{u^2}$ et $u \mapsto \frac{z(u)\cos(u)}{u^2}$ étant intégrables sur $[x_0, +\infty[$ (continue et $O(1/u^2)$ au voisinage de $+\infty$ puisque z est bornée), on peut introduire leurs intégrales U_n et V_n et on a alors

$$z(x) = (A + \lambda U_n)\sin(x) + (B - \lambda V_n)\cos(x) + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Enfin, il est classique d'une expression du type $a\cos(x) + b\sin(x)$ s'écrit aussi $\alpha\cos(x-\beta)$ (si $a = b = 0$, on choisit $\alpha = 0\beta = 0$; sinon $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est sur le cercle unité et s'écrit $(\cos(\beta), \sin(\beta))$ pour un bon β et en posant $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$ on a la forme voulue).

B.4. Si on pose $\lambda = \frac{1}{4} - n^2$ alors $z(x) = \sqrt{x}\varphi_n(x)$ est solution de (3.3) sur $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la question précédente, on obtient l'existence des constantes α_n, β_n désirées.

4 Etude des zéros de φ_n.

A. Avec les notations de $2.E$ et en choisissant $x = 3$ et $n = 0$, on a $p_0 = 1$ (la suite (a_p) décroît à partir du rang 1). Ainsi,

$$\forall N \geq 1,\ |\varphi_0(3) - S_N| \leq a_{N+1}$$

Un calul élémentaire fait à la calculatrice donne $a_4 = \frac{729}{16384}$ et $S_3 = -\frac{77}{256}$. Ainsi pour $N = 3$, on obtient

$$|\varphi_0(3) + \frac{77}{256}| \leq \frac{729}{16384}$$

On en déduit que

$$\varphi_0(3) \leq \frac{729}{16384} - \frac{77}{256} < 0$$

B. Procédons par récurrence comme le suggère l'énoncé.
- Initialisation : φ_0 est continue sur $]0, \alpha_0[$ et ne s'y annule pas. Elle est donc de signe constant sur cet intervalle. Or, $\varphi_0(0) = 1$ et par continuité en 0, le signe de φ_0 est positif sur $]0, \alpha_0[$.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n-1$. Avec $2.D$, $x \mapsto x^n\varphi_n(x)$ est strictement croissante sur $]0, \alpha_0[$. Elle est continue en 0 et vaut 0. Elle est donc > 0 sur $]0, \alpha_0[$.

C.1. $q(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$. Utilisons la définition des limites avec $\varepsilon = 1 - c^2 > 0$. On trouve $A > 0$ tel que $\forall x \geq A,\ |1 - q(x)| < 1 - c^2$ et on a donc

$$\forall x > A,\ q(x) > c^2$$

C.2. On sait que $z'' = -qz$ et un calcul élémentaire donne $z_1"" = -c^2 z_1$. Ainsi

$$W' = zz_1'' - z_1 z'' = (q - c^2)zz_1$$

C.3. Par définition de z_1, z_1 est strictement positive sur I_a (sin l'étant sur $]0, \pi[$). De même, $q - c^2$ est > 0 sur I_a (car $a > A$). Supposons, par l'absurde, que φ_n ne s'annule pas sur I_a ; il en est alors de même pour z qui, par continuité est soit > 0 soit < 0 sur I_a.
- Si z est > 0 sur I_a (et donc ≥ 0 sur $[a, a + \pi/c]$ par continuité) alors W' est > 0 sur I_a et est ainsi (toujours avec la continuité aux bornes) strctement croissante sur $[a, a + \pi/c]$. Par ailleurs, $W(a) = cz(a) \geq 0$ et $W(a + \pi/c) = -cz(a + \pi/c) \leq 0$. Les deux renseignements sont contradictoires.

- Si z est < 0 sur I_a alors le raisonnement est le même (si ce n'est qu'on aura décroissance et des signes opposés).

On en déduit que φ_n possède un zéro dans tout intervalle I_a avec $a > A$.

D.1. On construit par récurrence une suite $(\alpha_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. La construction va être telle que pour tout k, $\alpha_0^{(n)} < \cdots < \alpha_{k-1}^{(n)}$ seront les k premiers zéros de φ_n dans $\mathbb{R}^{+*}$.

- Cas de base : soit Z_0 l'ensemble des zéros de φ_n sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cet ensemble est non vide (il possède un élément dans I_{A+1} par exemple) et minoré et admet donc une borne inférieure $\alpha_0^{(n)}$. Comme tout zéro de φ_n est plus grand que α_0, on a $\alpha_0^{(n)} \geq \alpha_0 > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite (u_p) d'éléments de Z_0 qui converge vers $\alpha_0^{(n)}$. Comme φ_n est continue, en passant à la limite $p \to +\infty$ dans $\varphi_n(u_p) = 0$, on obtient $\alpha_0^{(n)} \in Z_0$ et $\alpha_0^{(n)}$ est un minimum qui est le premier zéro de φ_n dans $\mathbb{R}^{+*}$.
- Règle de construction : soit $k \geq 1$. Supposons construit $\alpha_0^{(n)} < \cdots < \alpha_{k-1}^{(n)}$ qui sont les k premiers zéros de φ_n dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit Z_k l'ensemble des zéros de φ_n dans $]\alpha_{k-1}^{(n)}, +\infty[$. Comme ci-dessus, Z_k est non vide (il y a un zéro dans $I_{A+\alpha_{k-1}^{(n)}}$) et possède une borne inférieure $\alpha_k^{(n)}$. Comme les zéros de φ_n sont isolés, il existe $\eta > 0$ tel que $Z - k \subset [\alpha_{k-1}^{(n)} + \eta, +\infty[$ et donc $\alpha_k^{(n)} > \alpha_{k-1}^{(n)}$. On montre comme ci-dessus que $\alpha_k^{(n)}$ est un minimum. On a donc $\alpha_0^{(n)} < \cdots < \alpha_k^{(n)}$ qui sont les $k+1$ premiers zéros de φ_n dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Il nous reste à étudier la suite $(\alpha_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite étant croissante, elle admet une limite éventuellement infinie. Si (par l'absurde) elle converge alors (par continuité de φ_n) sa limite est un zéro de φ_n mais il est alors non isolé (tout intervalle autour de ℓ contient une infinité de termes de la suite) ce qui est impossible. Ainsi

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k^{(n)} = +\infty$$

D.2. Soit $c \in]0,1[$. Ce qui précède donne un A. Comme $\lim_{k\to+\infty} \alpha_k^{(n)} = +\infty$, il existe j tel que $\forall p \geq j,\ \alpha_p^{(n)} > A$. Or, à partir de A, deux zéros de φ_n sont distants de strictement moins que π/c (avec $C.3$ utilisé avec $a = \alpha_p^{(n)}$). Ceci donne le résultat demandé.