Mathématiques 2

PSI **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Représentation connaissant les distances mutuelles

Notations

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels $\geqslant 1$.

On note la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On définit les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$J = Z^t Z \qquad \text{et} \qquad P = I_n - \frac{1}{n} J$$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique que l'on notera $< \cdot, \cdot >$ et l'espace de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \qquad (M \mid N) = \mathrm{tr}\left({}^t M N\right)$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices à valeurs propres positives ou nulles.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I Centrage de matrices

I.A – Soit π l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la représentation dans la base canonique est la matrice P.
Montrer que π est un projecteur orthogonal et en préciser les éléments caractéristiques.

I.B – On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi(M) = PMP$$

I.B.1) Montrer que Φ est un projecteur orthogonal dans l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\cdot \mid \cdot))$.

I.B.2) Montrer que $\mathrm{Im}\,\Phi = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MZ = 0 \text{ et } {}^t MZ = 0\}$.

I.C – Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$S(M) = MZ = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^n m_{1i} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n m_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(M)_1 \\ \vdots \\ S(M)_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma(M) = < Z, S(M) >$$

Montrer que

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}\left(S(M)^t Z + Z^t S(M)\right) + \frac{\sigma(M)}{n^2} J$$

II Produit scalaire à partir des distances mutuelles (relation de Torgerson)

Soient $U_1, U_2, \cdots, U_n$, n éléments de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^n U_i = 0$.

Géométriquement, $U_1, U_2, \cdots, U_n$ désignent des points d'isobarycentre l'origine.

On définit la matrice des distances mutuelles au carré, élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de la façon suivante :

BY-NC-SA

$$M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

On note U la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ admettant pour vecteurs colonnes les éléments $U_1, U_2, \cdots, U_n$ de $\mathbb{R}^p$. (On pourra noter commodément $U = (U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n)$).

II.A – Montrer que ${}^tUU = -\dfrac{1}{2}\Phi(M)$

II.B – En déduire, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, une expression du produit scalaire $< U_i, U_j >= {}^tU_iU_j$ en fonction de

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{n}\left(S(M)_i + S(M)_j\right) + \frac{1}{n^2}\sigma(M)$$

et de m_{ij} (relation de Torgerson).

Ainsi la matrice des distances mutuelles au carré permet de retrouver la matrice des produits scalaires ${}^tUU \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III Condition pour qu'une matrice soit une matrice de distances mutuelles au carré

Soit $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$ et $m_{ii} = 0$.

III.A – On suppose dans cette question qu'il existe $U_1, U_2, \cdots, U_n$ éléments de $\mathbb{R}^p$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$.

III.A.1) Montrer que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont toutes réelles et négatives ou nulles.

III.A.2) On suppose de plus (quitte à effectuer une translation) que les $(U_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont centrés, c'est-à-dire que $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$.

Montrer que $\mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n) = \mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right)$ et que $p \geqslant \mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right)$.

III.B – Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont toutes négatives ou nulles et on pose $\Psi(M) = -\frac{1}{2}\Phi(M)$ et $r = \mathrm{rg}(\Psi(M))$.

III.B.1) Montrer qu'il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = \Psi(M)$.

III.B.2) On note $U_1, U_2, \cdots, U_n$ les colonnes de la matrice U.

On cherche à montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$.

a) Montrer que les (U_i) sont centrés, c'est-à-dire que $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$.

b) Montrer que la matrice $N = (n_{ij})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ n_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$$

vérifie $\Psi(N) = \Psi(M)$.

c) Montrer que $M = N$ et conclure.

IV Étude d'un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, on considère quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ tels que $AB = BC = CD = DA = 1$. On pose $AC = a > 0$ et $BD = b > 0$.

On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces quatre points existent, dans un premier temps par un raisonnement géométrique puis en utilisant les résultats des parties précédentes.

IV.A – Étude géométrique

On suppose que les quatre points A, B, C et D existent.

IV.A.1) On suppose que les quatre points A, B, C et D sont coplanaires. Quelle relation vérifient alors a et b ?

IV.A.2) On suppose que les quatre points distincts A, B, C et D ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

a) Montrer que (IJ) est la perpendiculaire commune aux droites (AC) et (BD).

b) En projetant les points B et D sur le plan contenant (AC) et perpendiculaire à (IJ), montrer que $a^2 + b^2 < 4$.

On étudie maintenant la réciproque.

IV.A.3) Montrer que si des réels strictement positifs a et b vérifient la relation $a^2 + b^2 \leqslant 4$, alors il existe bien quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ vérifiant $AB = BC = CD = DA = 1$, $AC = a$ et $BD = b$.

 BY-NC-SA

IV.B – Étude algébrique

On se propose de retrouver les résultats précédents en utilisant les parties II et III.

Pour simplifier l'écriture des relations, on notera U_1, U_2, U_3 et U_4 les quatre points A, B, C et D de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant $U_1U_2 = U_2U_3 = U_3U_4 = U_4U_1 = 1$, $U_1U_3 = a$ et $U_2U_4 = b$.

IV.B.1) On reprend les notations des parties précédentes avec ici $n = 4$.

On pose $M = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

Écrire la matrice M puis calculer $S(M)$ et $\sigma(M)$.

IV.B.2) Montrer que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres de la matrice $\Psi(M)$ et déterminer les valeurs propres de la matrice $\Psi(M)$.

IV.B.3) Déterminer le rang de $\Psi(M)$ selon les valeurs prises par a et b.

IV.B.4) Quelle égalité vérifie les réels a et b lorsque les points U_1, U_2, U_3 et U_4 sont coplanaires ?

IV.B.5) Retrouver que les réels strictement positifs a et b vérifient $a^2 + b^2 \leqslant 4$.

IV.B.6) Réciproquement, si $a^2+b^2 \leqslant 4$, donner une famille de points U_1, U_2, U_3 et U_4 vérifiant les contraintes de distances mutuelles.

V Cas où il n'existe pas de points représentant une matrice de distances mutuelles

On considère dans cette partie une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$ et $m_{ii} = 0$.

On suppose que $\Psi(M)$ possède au moins une valeur propre strictement négative. Dans la suite, on étudie trois transformations permettant de modifier « légèrement » la matrice M pour obtenir une nouvelle matrice de distances mutuelles au carré.

V.A – Par les moindres carrés

V.A.1) On cherche à prouver qu'il existe une unique matrice symétrique T_0 à valeurs propres positives ou nulles qui minimise $\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \|{}^tQAQ\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|A\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

b) Justifier l'existence d'une matrice $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice ${}^tQ_0\Psi(M)Q_0$ soit diagonale.

c) Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\|\Psi(M) - T_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ minimise $\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est que la matrice ${}^tQ_0T_0Q_0$ soit diagonale.

d) Prouver l'existence et l'unicité de la matrice T_0 cherchée.

V.A.2) On suppose dans cette question que T_0 est non nulle. On veut montrer qu'il existe un entier $p \in [\![1, n-1]\!]$ minimal que l'on précisera tel que l'on puisse déterminer des vecteurs $U_1, U_2, \cdots, U_n$ éléments de $\mathbb{R}^p$ satisfaisant la condition $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$ et pour lesquels la matrice $\widetilde{M} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ vérifie la relation $\Psi(\widetilde{M}) = T_0$.

On reprend les notations de la partie II et on note $U = (U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n)$.

a) Montrer que l'entier p vérifie $p \geqslant \operatorname{rg}(T_0)$ et que $\operatorname{rg}(T_0) \in [\![1, n-1]\!]$.

b) Construire une matrice $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = T_0$ pour $r = \operatorname{rg}(T_0)$.

Indication. En supposant que ${}^tQ_0T_0Q_0$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \Delta & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $\Delta \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, diagonale à valeurs non nulles, on cherchera U sous la forme $U = ((\Delta_1)\ (0)) \times Q_0 \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ avec $\Delta_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, diagonale.

c) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$ (on pourra étudier le vecteur UZ).

d) En déduire que $\Psi(\widetilde{M}) = T_0$ avec $\widetilde{M} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et conclure.

 BY-NC-SA

V.B – *Par décalage de la distance au carré*

On pose $\xi_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $N_k = \left(m_{ij} + k\xi_i^j\right)$ avec k un nombre réel strictement positif.

V.B.1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'hyperplan $\mathcal{H}$ de vecteur normal Z (et d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$) est stable par l'endomorphisme canonique associé à la matrice $\Psi(A)$.

V.B.2) Exprimer la matrice N_k en fonction des matrices M, J, I_n et du réel k.

V.B.3) Montrer qu'il existe un réel k_0 minimal que l'on précisera en fonction des valeurs propres de $\Psi(M)$, tel que la matrice $\Psi(N_{k_0})$ soit à valeurs propres positives ou nulles.

V.C – *Par décalage de la distance (résultat dû à F. Cailliez, 1983)*

On pose $D = (d_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\sqrt{m_{ij}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à construire une matrice

$$M_c = \left(\left(d_{ij} + c\xi_i^j\right)^2\right)$$

avec $c > 0$ telle que $\Psi(M_c)$ soit à valeurs propres positives ou nulles.

V.C.1) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX\Psi(M_c)X = {}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \dfrac{c^2}{2}{}^tXPX$.

V.C.2) Montrer que si $\lambda_{\min}$ et $\mu_{\min}$ désignent les valeurs propres minimales respectives de $\Psi(M)$ et $\Psi(D)$, alors

$$\forall X \in \mathcal{H}, \qquad {}^tX\Psi(M)X \geqslant \lambda_{\min}{}^tXX \quad \text{et} \quad {}^tX\Psi(D)X \geqslant \mu_{\min}{}^tXX$$

(L'hyperplan $\mathcal{H}$ a été défini à la **question V.B.1**.)

V.C.3) En déduire que pour $c = \widetilde{c} = -2\mu_{\min} + \sqrt{4\mu_{\min}^2 - 2\lambda_{\min}} > 0$, $\Psi(M_c)$ est à valeurs propres positives ou nulles et que pour tout $c > \widetilde{c}$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

V.C.4) Nous allons chercher la constante $c^* > 0$ minimale (si elle existe) vérifiant
- $\Psi(M_{c^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles,
- pour tout $c > c^*$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

On sait que c^* est majoré par $\widetilde{c}$.

On considère $\mathcal{A} = \left\{X \in \mathcal{H} \mid \|X\| = 1 \text{ et } 4\left({}^tX\Psi(D)X\right)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X \geqslant 0\right\}$ et on définit l'application

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto -2{}^tX\Psi(D)X + \sqrt{4\left({}^tX\Psi(D)X\right)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $X^* \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(X^*) = \sup\limits_{X\in\mathcal{A}} \alpha(X)$ et $\alpha(X^*) > 0$.

On notera $\alpha^* = \alpha(X^*)$.

V.C.5) Montrer que
- ${}^tX^*\Psi(M_{\alpha^*})X^* = 0$,
- $\Psi(M_{\alpha^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles,
- pour tout $c > \alpha^*$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

En conclure que $c^* = \alpha^*$.

V.C.6) Calcul de c^*

a) Montrer que $\Psi(M_{c^*})X^* = 0$.

On pose $Y^* = \dfrac{2}{c^*}\Psi(M)X^*$.

b) Montrer que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice de taille $2n$ $\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$ et que c^* est valeur propre de cette matrice.

V.C.7) On considère γ une valeur propre réelle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que ${}^tX_2\Psi(M_\gamma)X_2 = 0$ et que $X_2 \neq 0$. En conclure que $\gamma \leqslant c^*$.

b) Quelle conclusion en déduit-on sur le calcul de la plus petite constante additive c^* ?

Ce sujet s'inspire des techniques du « positionnement multidimensionnel » (Multi Dimensional Scaling en anglais) dans le domaine de l'analyse des données (une branche des mathématiques). Ces méthodes furent particulièrement utilisées avec les avancées de l'informatisation en psychométrie et en biologie (en écologie des populations pour visualiser les associations entre espèces par exemple).

• • • FIN • • •

BY-NC-SA