# Mathématiques 1

**PSI** **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Le but de ce problème est d'établir ***partie V*** une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler, puis d'en présenter ***partie VI*** une application à la distribution de Bolzmann dans un gaz de particules.

## I La fonction Gamma

On définit la fonction $\Gamma$ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

***I.A*** – Montrer que la fonction $t \to e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

***I.B*** – Justifier que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

***I.C*** – Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $x$ et de $\Gamma(x)$.

***I.D*** – Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel $n$, $n \geqslant 1$.

## II Formule de Stirling

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose :

$$u_k = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt$$

***II.A*** – À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \frac{1}{2}\left(\ln k - \ln(k-1)\right) - \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

***II.B*** – Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note :

$$w_k = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} w_k$.

En déduire qu'il existe un nombre réel $a$ tel que :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + v_n$$

où $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

***II.C*** – En utilisant encore une intégration par parties, montrer que :

$$\left| w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

***II.D*** – En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

puis que :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite on admettra que $a = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

## III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{III.1}$$

On désigne par $(f_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in ]0, n[ \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(J_n(x))_{n \geqslant 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt$$

***III.A*** – Montrer que pour tout entier $n$, $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

***III.B*** – Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

***III.C*** – Montrer que, pour tout entier $n$, $n \geqslant 0$,

$$\forall x > 0, \qquad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

***III.D*** – En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

***III.E*** – Établir l'identité d'Euler (**III.1**).

## IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction $h$ sur $\mathbb{R}$ par

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto u - [u] - 1/2$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de $u$.

***IV.A*** – Dessiner soigneusement le graphe de l'application $h$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

***IV.B*** – Montrer que la fonction $H$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

***IV.C*** – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

***IV.D*** – L'application $u \longmapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ?

***IV.E*** – Soit $\varphi$ l'application définie pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

En reprenant l'intégration par parties de la **question IV.C**, démontrer que l'application $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

# V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$ :

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

où $h$ est l'application définie à la **partie IV**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel $n$, on définit $F_n(x)$ par :

$$F_n(x) = \ln \left( \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} \right)$$

***V.A*** – Montrer que pour tout entier naturel $i$ :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t\, dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du$$

***V.B*** – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1) \ln n - \left(x + n + \frac{3}{2}\right) \ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x$$

***V.C*** –

**V.C.1)** En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}$$

**V.C.2)** En déduire que :

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

***V.D*** – Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

# VI Distribution de Bolzmann

***VI.A*** – Soient $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ quatre nombres réels strictement positifs deux à deux distincts et deux nombres réels strictement positifs $E$ et $N$. Soit $\Omega$ la partie, supposée non vide, formée des quadruplets $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 = E \end{cases}$$

**VI.A.1)** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^4$.

Montrer que $f$ admet un maximum sur $\Omega$.

On note alors $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$ un point en lequel ce maximum est atteint.

**VI.A.2)** Montrer que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ alors $x_3$ et $x_4$ peuvent s'écrire sous la forme

$$x_3 = u x_1 + v x_2 + w$$
$$x_4 = u' x_1 + v' x_2 + w'$$

où l'on donnera explicitement $u$, $v$, $u'$, $v'$ en fonction de $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$.

**VI.A.3)** En supposant qu'aucun des nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ n'est nul, déduire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0$$

 

**VI.A.4)** Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, u, u')$ et $(0, 1, v, v')$ admet un sous-espace supplémentaire orthogonal engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

**VI.A.5)** En déduire l'existence de deux réels $\alpha$, $\beta$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta\varepsilon_i$$

***VI.B*** – On définit la fonction $F$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sum_{i=1}^{4} \ln \Gamma(1 + x_i)$$

On suppose qu'il existe $\overline{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4) \in \Omega$, les nombres $N_1, N_2, N_3, N_4$ étant tous les quatre non nuls, tel que

$$\max_{x\in\Omega} F(x) = F(\overline{N})$$

Montrer l'existence de deux nombres réels $\lambda$ et $\mu$ vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ :

$$\ln N_i + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2}\, du = \lambda + \mu\varepsilon_i$$

***VI.C*** – Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on pose

$$\theta(N_i) = \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2}\, du$$

**VI.C.1)** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

**VI.C.2)** Montrer l'existence d'un réel $K$ strictement positif tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$N_i = Ke^{\mu\varepsilon_i}e^{-\theta(N_i)}$$

### Commentaire

*Les calculs précédents interviennent dans la modélisation de gaz de particules :* $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ *correspondent à quatre niveaux différents d'énergies et* $N_1, \dots, N_4$ *aux nombres de particules qui se trouvent respectivement au niveau* $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ *(pour un total de $N$ particules et une énergie totale $E$). Sous réserve d'équiprobabilité des répartitions, la probabilité d'être dans la configuration* $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *est donnée par* $N!/(N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!)$.

*En mécanique statistique, on pose comme principe que les particules vont se répartir de manière à ce que cette probabilité soit maximale. Cela revient à chercher la répartition qui maximise la somme* $-\sum_{i=1}^4 \ln(N_i!)$*, assujettie aux conditions de* **VI.A**. *Il découle alors du dernier résultat établi dans le problème, la* **loi de répartition de Bolzmann**, *à savoir que pour tous $j$, $k$, $j \neq k$, si $N_j$ et $N_k$ sont assez grands :* $N_j/N_k \simeq e^{\mu(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}$. *D'autre part, un calcul utilisant conjointement la formule de Bolzmann donnant l'expression statistique de l'entropie* $S = -k_B \ln(N!/(N_1! \cdots N_4!))$ *et la relation* $dS = dE/T$ *(pour une transformation à volume constant) permet d'établir que* $\mu = -1/k_B T$.

• • • FIN • • •