

Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Filière PSI

Calculatrices autorisées

Le problème porte sur des déclinaisons de la lettre « C » dans différents domaines des mathématiques. Les trois parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un « C » matriciel

On considère la matrice à coefficients réels $C \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$, et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C . Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes à 7 lignes à coefficients réels et les vecteurs de $\mathbb{R}^7$.

On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C .

I.A - Image et noyau de c

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c , ainsi que le rang de c .

I.B - Restriction de c

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2 et f_3 de C .

I.B.1) Montrer que F est stable par c .

I.B.2) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F , et calculer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c .

I.C - Détermination sans calcul du spectre de Φ

Dans cette question, on se propose de calculer le spectre de Φ sans calculer son polynôme caractéristique.

I.C.1) Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?

I.C.2) Peut-on déduire du seul calcul de la trace de Φ que Φ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

I.C.3) Calculer Φ^2 . À partir des informations complémentaires obtenues par le calcul de la trace de Φ^2 , déterminer le spectre de Φ .

La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

I.D - Étude du caractère diagonalisable de C

I.D.1) Déduire des questions précédentes le spectre de C . On précisera l'ordre de multiplicité des valeurs propres.

I.D.2) La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? Si oui, indiquer une matrice diagonale semblable à C .

I.E - Étude d'une équation fonctionnelle

Notation : si f est une fonction de classe C^1 d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) vers $\mathbb{R}$, on note, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq d$, $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à sa i -ème variable. Ainsi, la notation $\partial_i f(x_1, \dots, x_d)$ désigne la valeur de la dérivée partielle de f par rapport à sa i -ème variable évaluée au point $(x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{U}$.

Dans cette section, on se propose d'étudier les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^7$ vers $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition $f \circ c = f$, c'est-à-dire telles que $f(x_3 + x_4, x_2 + x_5, x_1, x_1, x_1, x_2 + x_5, x_3 + x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbb{R}^7$.

I.E.1) Quelle structure possède l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^7$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f \circ c = f$?

I.E.2) Montrer qu'une telle fonction vérifie $f \circ c^n = f$ pour tout entier $n \geq 1$.

I.E.3) Soit $f \in \mathcal{S}$. Calculer la matrice jacobienne de $f \circ c$ en $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$. En déduire un système d'équations reliant les dérivées partielles $\partial_1 f(X), \dots, \partial_7 f(X)$ de f en un point X de $\mathbb{R}^7$.

I.E.4) Pour $f \in \mathcal{S}$, calculer la matrice jacobienne de $f \circ c^2$ en $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$. Compléter le système d'équations reliant les dérivées partielles $\partial_1 f(X), \dots, \partial_7 f(X)$ de f en un point X de $\mathbb{R}^7$ obtenu à la question précédente.

I.E.5) APPLICATION : sans calcul supplémentaire, déterminer les formes linéaires f sur $\mathbb{R}^7$ qui appartiennent à $\mathcal{S}$.

Partie II - Équation différentielle pour la lettre « C »

Dans toute la suite du problème, on note $\mathcal{C}$ l'image dans $\mathbb{R}^2$ de l'application

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, 2 \sin t).$$

Dans cette partie, on étudie l'équation différentielle

$$y(x)y'(x) = -4x. \quad (E)$$

II.A - Transformation de solutions

Montrer que si f est une solution de (E) sur un intervalle J , et si a est un réel non nul, alors la fonction h définie par $h(x) = af\left(\frac{x}{a}\right)$ est aussi une solution de (E) sur un intervalle que l'on précisera.

II.B - Le « C » solution

On note g la fonction d'une variable réelle à valeurs réelles dont le graphe est $\gamma\left(\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]\right)$.

- II.B.1) Déterminer l'ensemble de définition Δ de g , ainsi qu'une expression de g .
- II.B.2) Vérifier que la restriction de g au plus grand intervalle ouvert inclus dans Δ est une solution de (E).
- II.B.3) Est-ce une solution maximale? Sinon, déterminer une solution maximale m dont le graphe inclut celui de g .

II.C - Le théorème de Cauchy-Lipschitz - Solutions maximales

- II.C.1) Rappeler l'énoncé du théorème d'existence et d'unicité des solutions maximales d'une équation différentielle scalaire non linéaire soumise aux conditions de Cauchy.
- II.C.2) Expliquer comment, et éventuellement dans quelle mesure, ce théorème s'applique à (E).
- II.C.3) Les solutions maximales données par ce théorème sont-elles des solutions maximales de (E)?
- II.C.4) Dédurre des questions précédentes les solutions maximales de (E).

II.D - Développement en série entière d'une solution

- II.D.1) Montrer que la solution m déterminée à la question III.B.3) est développable en série entière au voisinage de 0. Calculer ce développement et préciser son rayon de convergence.
- II.D.2) En déduire les développements en série entière de toutes les solutions maximales de (E); préciser les rayons de convergence de ces séries entières.

Partie III - Des courbes pour la lettre « C »

III.A - Topologie de $\mathcal{C}$

- III.A.1) Représenter $\mathcal{C}$.
- III.A.2) Préciser les propriétés topologiques suivantes de $\mathcal{C}$.
 - a) Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$?
 - b) Un fermé?
 - c) Une partie bornée?
 - d) Un compact?
 - e) Une partie convexe?

III.B - Paramétrisation complexe de $\mathcal{C}$

On rappelle que $\mathcal{C}$ a été définie dans la partie II comme l'image de l'application

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, 2 \sin t).$$

Dans cette question, on va chercher une paramétrisation complexe de $\mathcal{C}$, de la forme

$$z : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)},$$

où ρ et θ sont deux fonctions continues de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$ vers $\mathbb{R}$, la fonction ρ étant à valeurs strictement positives.

- III.B.1) Calculer $\rho(t)$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$.
- III.B.2) Représenter sur la calculatrice l'arc paramétré

$$\mathcal{C} : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)e^{it},$$

et reproduire sommairement la courbe sur la copie. Quelle lettre cette courbe évoque-t-elle?

- III.B.3) À partir de l'expression de $\gamma(t)$, calculer $\tan \theta(t)$.
- III.B.4)

a) Représenter la fonction $t \mapsto \arctan(2 \tan t)$ sur la partie de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$ sur laquelle cette fonction est définie.

b) Modifier cette fonction pour déterminer la fonction continue θ cherchée.

On vérifiera le résultat en représentant à l'aide de la calculatrice la courbe paramétrée z .

III.B.5) Indiquer une suite d'instructions *Maple* ou *Mathematica* permettant d'obtenir ce tracé.

III.C - Une famille de courbes paramétrées pour la lettre « C »

Dans cette question, on va construire une famille de courbes déduites de celle de la question V.A, mais donnant un aspect visuel différent de la lettre « C ».

Dans ce qui suit, la notation $E(x)$ désignera la partie entière du réel x .

On définit les applications :

$$\bullet \alpha : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}, (n, t) \mapsto \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2n} E \left(\frac{2n}{3\pi} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\bullet \omega : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}, (n, t) \mapsto \cos^2 \left(\frac{2n}{3} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

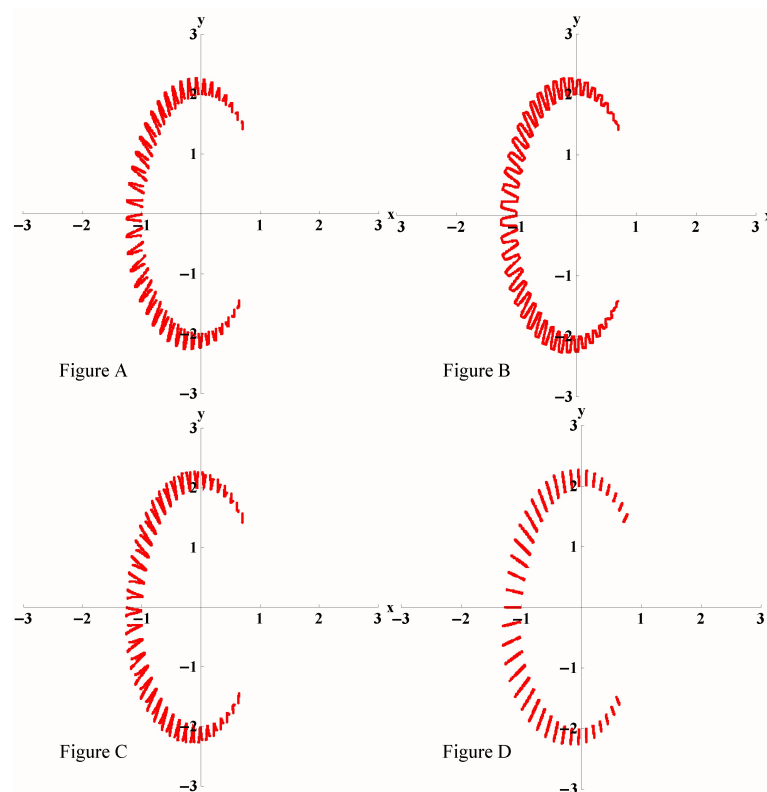
III.C.1) Étudier rapidement α et ω , puis représenter sur un même graphique les deux fonctions $t \mapsto \alpha(10, t)$ et $t \mapsto \omega(10, t)$.

III.C.2) Représenter la fonction $\psi : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{4} \sin \left(\frac{2}{3} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right)$.

III.C.3) On définit la fonction :

$$w : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{C}, (n, t) \mapsto \rho(t) (1 + \psi(t)\omega(n, t)) e^{i\theta(\alpha(n, t))}.$$

On a représenté ci-contre cette courbe, lorsque $n = 40$. Mais la courbe a été mélangée avec d'autres courbes représentant la lettre « C ». Identifier lequel des quatre graphiques représente la fonction $t \mapsto w(40, t)$, et expliquer pourquoi.



III.C.4) Écrire une séquence d'instructions *Maple* ou *Mathematica* permettant de créer la séquence des 100 premières courbes (on pourra créer une animation).

III.D - Calcul d'aire

Dans cette question, on se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant tous les points $w(n, t)$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ et t décrit $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$. Ce domaine est délimité par deux arcs paramétrés définis par

$$z : I \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t) e^{i\theta(t)} = \sqrt{1 + 3 \sin^2 t} e^{i(\arctan(2 \tan t) + \pi E(\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}))}$$

$$v : I \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{1 + 3 \sin^2 t} \left(1 + \frac{1}{4} \sin \left(\frac{2}{3} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) e^{i(\arctan(2 \tan t) + \pi E(\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}))}.$$

Pour calculer cette aire, on va utiliser la formule de Green-Riemann. Le bord du domaine étant donné par un arc paramétré complexe de la forme $v : t \mapsto \sigma(t)e^{i\mu(t)}$, on va d'abord traduire ce théorème dans le cas particulier des domaines donnés sous cette forme.

III.D.1) Rappeler l'énoncé du théorème de Green-Riemann. Expliquer comment ce théorème se traduit dans le cas d'un calcul d'aire.

III.D.2) Rappeler la formule donnant le produit scalaire de deux nombres complexes. En déduire l'expression du produit scalaire $\langle u \circ v(t), v'(t) \rangle$, lorsque u et v sont les applications $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto iz$ et $v : t \mapsto \sigma(t)e^{i\mu(t)}$, où σ et μ sont deux fonctions définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et de classe C^1 .

III.D.3) Si $d(t) = \arctan(2 \tan(t))$, simplifier $\frac{1}{2}(1 + 3 \sin^2 t)d'(t)$.

III.D.4) Déduire des questions précédentes une expression de $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale. Simplifier cette intégrale grâce à l'identité obtenue en III.D.3). Calculer enfin $\mathcal{A}$.

• • • FIN • • •
