Centrale PSI 09 - Math 2
Un corrigé.

1 Valeurs propres de AB et BA.

A.1. λ est valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssi $M-\lambda I_n$ est non inversible c'est à dire si $\det(M-\lambda I_n) = 0$. Ainsi, 0 est valeur propre de AB ssi $\det(AB) = 0$.

A.2. Comme $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$, 0 est valeur propre de AB ssi c'est une valeur propre de BA.

B.1. Par hypothèse, $X \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et $ABX = \lambda X$. On a donc $ABX \neq 0$ et a fortiori $BX \neq 0$ (car $A0 = 0$).

B.2. On a
$$BA(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda(BX)$$
Comme BX est non nul, il est vecteur propre pour BA associé à la valeur propre λ.

B.3. Toute valeur propre (nulle ou non) de AB est valeur propre de BA. On a la réciproque par symétrie des rôles et donc AB et BA ont même spectre.

C.1. On remarque que
$$AB - xI = A(BA - xI)A^{-1}$$
$AB - xI$ et $BA - xI$ sont semblables et ont donc même déterminant.

C.2. On vient de voir que AB et BA ont même polynôme caractéristique. Par définition, leurs valeurs propres (qui sont égales) ont même multiplicité (les valeurs propres, réelles ou complexes, sont les racines, réelles ou complexes, du polynôme caractéristique et la multiplicité d'une valeur propre est la multiplicité comme racine du polynôme caractéristique).

2 Valeurs singulières d'une matrice.

A.1.

a. Si $AX = 0$ alors ${}^tAAX = {}^tA0 = 0$.

b. Réciproquement, si ${}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2$ et si ${}^tAAX = 0$ alors $\|AX\| = 0$ et donc $AX = 0$.

c. $AX = 0 \iff {}^tAAX = 0$ donne $f(x) = 0 \iff g(x) = 0$ et donc $\ker(f) = \ker(g)$. Par théorème du rang,
$$\text{rg}(A) = n - \dim(\ker(A)) = n - \dim(\ker({}^tAA)) = \text{rg}({}^tAA)$$

A.2. ${}^t(MN) = {}^tN{}^tN$ et ${}^{tt}N = N$ donnent immédiatement la symétrie de ${}^tAA$ et de $A{}^tA$.

A.3. ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont symétriques réelles et donc diagonalisables par le biais de matrices de passages orthogonales. De plus, elles ont même spectre et des valeurs propres de mêmes multiplicités et sont sont donc semblables à une même matrice diagonale. Il existe donc D diagonale et P, Q orthogonales telles que $P^{-1t}AAP = Q^{-1}A{}^tAQ = D$. Comme ${}^tP = P^{-1}$ et ${}^tQ = Q^{-1}$ (matrices orthogonales), on a donc les relations voulues.

A.4. D étant diagonale, son rang est égal au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls. Mais comme D est semblable à ${}^tAA$, elle est de même rang que ${}^tAA$ et donc aussi que A. D possède donc r coefficients diagonaux non nuls.

A.5.

a. On a
$$D = {}^tP{}^tAAP = {}^tMM \quad \text{avec} \quad M = AP$$

b. Notons $E_1, \dots, E_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a
$$\lambda_i = (E_i|\lambda_i E_i) = {}^tE_i D E_i = {}^tE_i{}^tMME_i = \|ME_i\|^2 \geq 0$$

A.6. On remarque que comme ${}^tUU = I$ on a

$$^t(UAV)(UAV) = {}^tV{}^tAAV = V^{-1t}AAV$$

${}^tAA$ et ${}^t(UAV)(UAV)$ étant semblables ont mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité. Les valeurs singulières étant les racines carrées de ces valeurs propres, ce sont aussi les mêmes pour A et UAV.

A.7. A étant symétrique réelle est diagonalisable par le biais d'une matrice de passage orthogonale. En notant $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de A, il existe donc $U \in O(n)$ telle que

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta$$

Comme $U, U^{-1} \in O(n)$, A et Δ ont mêmes valeurs singulières et comme ${}^t\Delta\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$, ces dernières sont les $|\mu_i|$. Ainsi, pour une matrice symétrique les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres.

B.1. ${}^tAA$ étant symétrique réelle, on peut trouver une b.o.n. $(X_1, \dots, X_n)$ formée de vecteurs propres pour cette matrice. Quitte à renuméroter, on peut supposer que sont placés en dernier les vecteurs propres associés à la valeur propre 0. Comme ${}^tAA$ est de rang ρ, son noyau est de dimension $n-\rho$ et ce sont les $X_{\rho+1}, \dots, X_n$ qui sont dans $\ker({}^tAA) = \ker(g) = \ker(f)$. Comme f est aussi de rang ρ (avec $II.A$), son noyau est de dimension $n-\rho$ et, par cardinal et dimension, la famille libre $(X_{\rho+1}, \dots, X_n)$ est une base de $\ker(f)$.

B.2. Avec la question $I.B.1$, $AX_1, \dots, AX_\rho$ sont non nuls. De plus

$$\forall 1 \le i < j \le \rho,\ (AX_i|AX_j) = {}^tX_i{}^tAAX_j = \lambda_j{}^tX_iX_j = 0$$

car les X_k sont deux à deux orthogonaux. $(AX_1, \dots, AX_\rho)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et est donc libre. Comme c'est une failme constituée d'éléments de $\mathrm{Im}(f)$, il forment, par cardinal et dimension, une base de cet espace.

B.3. Le même calcul donne

$$\forall i,\ \|AX_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$$

B.4. Pour $i \in [1..\rho]$, je pose $Y_i = \frac{1}{\sigma_i}AX_i$. $(Y_1, \dots, Y_\rho)$ est une famille orthonormée. On complète cette famille orthonormée en une b.o.n. $\mathcal{B}_2 = (Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (théorème de la b.o.n. incomplète). Comme $\forall i \in [1..\rho],\ AX_i = \sigma_iY_i$ et $\forall i \ge \rho+1,\ AX_i = 0 = \sigma_iY_i$, on a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

B.5. Par formule de changement de base,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}}$$

Une matrice de passage entre b.o.n. étant un élément de $O(n)$, l'identité précédente donne

$$A = P_1\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)P_2 \quad \text{avec} \quad P_1P_2 \in O(n)$$

C.1. On vient de voir le sens réciproque.
Dans le sens direct, $II.A.6$ donne que A et $\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ont mêmes valeurs singulières et $II.A.7$ indique que les σ_i (qui sont positifs) sont ces valeurs singulières.

C.2. Le sens réciproque est conséquence de $II.A.6$.
Pour le sens direct, on a des matrices orthogonales P_1P_2, Q_1, Q_2 telles que

$$P_1AP_2 = Q_1BQ_2 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

et en posant $R_1 = P_1^{-1}Q_1$ et $R_2 = Q_2P_2{-1}$ on obtient de matrices orthogonales telles que $A = R_1BR_2$.

3 Etude géométrique d'un exemple.

A.1. A est de rang au moins 2 (deux colonnes indépendantes) et non inversible (une ligne nulle). Son rang est donc égal à 2. Le calcul donne

$$^tAA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2. 1 est valeur propre de ^tAA (vecteur propre $(0,1,1)$) ainsi que 0 (matrice non inversible, vecteur propre $(1,1,-1)$). Avec sa trace, la dernière valeur propre est égale à 3 (et on trouve aisément que $(2,-1,1)$ est vecteur propre associé). On a donc

$$\sigma_1 = \sqrt{3},\ \sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = 0$$

A.3. On vient d'exhiber des vecteurs propres. Ils sont orthogonaux et il suffit de les normer.

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1),\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ X_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

A.4. Conformément à la partie II, on pose

$$Y_1 = \frac{1}{\|AX_1\|}AX_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ Y_2 = \frac{1}{\|AX_2\|}AX_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

et, pour compléter en une b.o.n.

$$Y_3 = Y_1 \wedge Y_2 = (0,0,1)$$

A.5. La formule provient de $II.B.5$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}}$$

B.1. Si $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$ alors $\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et

$$AX = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i x_i Y_i = \sqrt{3}x_1Y_1 + x_2Y_2$$

Tout élément de $\mathcal{S}$ paut donc s'écrire $\sqrt{3}x_1Y_1 + x_2Y_2$ et $\mathcal{S}$ est inclus dans le plan $\mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$. Comme Y_3 est normal à ce plan, une équation cartésienne de celui-ci est $z = 0$.

B.2. Les éléments de $\mathcal{S}$ sont les éléments qui ont les $\sigma_i x_i$ pour coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ où (x_1, x_2, x_3) vérifie $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (voir ci-dessus). Comme Q permet de passer des coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ à celles dans $\mathcal{B}$, on a donc (les $\sigma_i x_i$ étant les coordonnées de $D\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$)

$$\mathcal{S} = \{QDX'/\ X' \in \mathbb{R}^3,\ \|X'\| = 1\}$$

B.3. Le calcul de la question $B.1$ montre que le vecteur de coordonnées (y_1, y_2, y_3) dans $\mathcal{B}_2$ est dans $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe (x_1, x_2, x_3) normé tel que $y_1 = \sigma_1 x_1$, $y_2 = \sigma_2 x_2$ et $y_3 = \sigma_3 x_3 = 0$. Pour un tel élément, on a $\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = x_1^2 + x_2^2 \in [0,1]$.
Réciproquement, si cette condition est vérifiée, en posant $x_1 = y_1/\sigma_1$, $x_2 = y_3/\sigma_2$ et $x_3 = \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{y_2^2}{\sigma_2^2}}$ on obtient (x_1, x_2, x_3) normé tel que $y_1 = \sigma_1 x_1$, $y_2 = \sigma_2 x_2$ et $y_3 = \sigma_3 x_3$

Dans la base $\mathcal{B}_2$, l'équation de $\mathcal{S}$ est donc $\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \le 1 \\ y_3 = 0 \end{array} \right.$.

B.4. On obtient donc une ellipse dans le plan $\mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$.

4 Image de la sphère unité.

A.1. A étant iversible, ${}^tAA$ l'est et ses valeurs propres sont non nulles. Par définition, les valeurs singulières de A sont non nulles et même > 0 (racines carrées d'éléments > 0).

A.2. On introduit des b.o.n. $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, X_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ comme en partie II : les X_i forment une b.o.n. de vecteurs propres de ${}^tAA$ et $Y_i = \frac{1}{\|AX_i\|}AX_i$ (ici il n'y a pas de valeur propre nulle). Le même calcul qu'en partie III montre que l'équation de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}_2$ est

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

A.3. On a un ellipsoïde.

B.1. Comme A est de rang 1, il en est de même pour ${}^tAA$ et deux des valeurs singulières sont nulles (0 est valeur propre double de ${}^tAA$) et une autre est > 0.

B.2. En introduisant toujours les bases $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, X_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ on obtient que l'équation de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}_2$ est

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} \in [0, 1] \text{ et } y_2 = y_3 = 0$$

Il s'agit du segment liant les points de coorodonnées $(-\sigma_1, 0, 0)$ et $(\sigma_1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}_2$. La longueur de ce segment est $2\sigma_1$ (Y_1 est normé).

5 Pseudo-inverse d'une matrice.

A. Q_1 et Q_2 étant inversible, on ne change pas le rang en multipliant par l'une de ces matrices et

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0)) = p$$

B Comme Q_2 est orthogonale, on a

$$AA^+ = Q_1\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0)\text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_p, 0, \dots, 0)^tQ_1 = Q_1\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)Q_1^{-1}$$

Si A est inversible, $p = n$ et $AA^+ = I$ et donc $A^+ = A^{-1}$.

C. En reprenant le résultat précédent,

$$Q_1^{-1}AA^+Q_1 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant $(X_1, \dots, X_n)$ la famille des colonnes de Q_1 (c'est une b.o.n.) h s'interprète comme la projection orthogonale sur $\text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ et est de rang p (h et cette projection orthogonale ont même matrice dans la base des X_i)

D. On a $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f)$ (un élément qui s'écrit $(AA^+)X$ s'écrit $A(A^+X)$). Comme ces espaces ont la même dimension, ils sont égaux.

E. La distance de Y à $\text{Im}(f)$ est atteinte en un unique point qui est le projeté orthogonal de Y sur $\text{Im}(f) = \text{Im}(h)$ et qui est donc AA^+Y (puisque h est une projection orthogonale). On a donc

$$\forall Z \in \text{Im}(f),\ \|Y - AA^+Y\| \leq \|Y - Z\|$$

Quand X décrit $\mathbb{R}^n$, AX décrit $\text{Im}(f)$ et ainsi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|Y - AA^+Y\| \leq \|Y - AX\|$$

A^+Y est donc bien l'un des vecteurs X tels que $\|Y - AX\|$ soit minimale.