Centrale PSI 09 - Math 1
Un corrigé.

1 Réorganisation des termes d'une série semi-convergente.

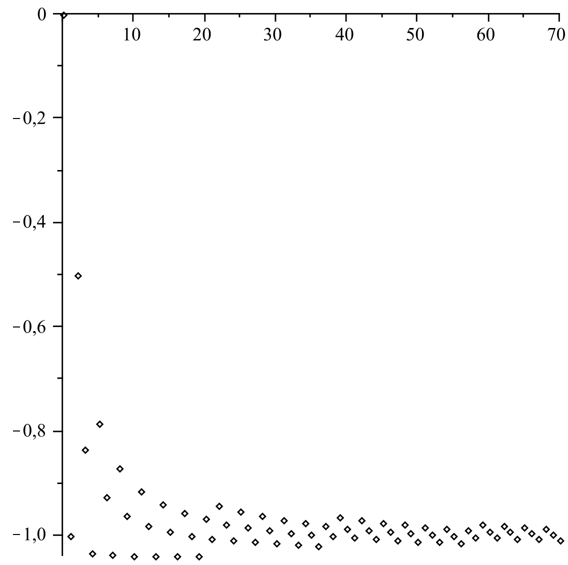
A.1. On suit la définition de l'énoncé.

```
suite:=proc(x,n)
local k,p,q,s,S,list;
p:=0;q:=0;S:=0;list:=[];
for k from 1 to n do
   if S>x then q:=q+1;s:=2*q-1
   else p:=p+1;s:=2*p fi;
   S:=S+(-1)^s/s ; print(evalf(S));
   list:=[op(list),s]
   od ;
list
end :
```

A.2. Voici, à titre indicatif, une fonction permettant l'affichage des points (n, S_n).

```
suite2:=proc(x,n)
local k,p,q,s,S,list;
p:=0;q:=0;S:=0;list:=[[0,0]];
for k from 1 to n do
   if S>x then q:=q+1;s:=2*q-1
   else p:=p+1;s:=2*p fi;
   S:=S+(-1)^s/s ;
   list:=[op(list),[k,S]]
   od :
plot(list,style=point);
end :
```

Pour $x = -1$ et $n = 70$, on obtient le dessin suivant :



Ce n'est pas le schéma de l'énoncé ! Celui-ci a été tracé avec une fonction `suite` où le test sur S_n est $S_n \geq x$ (et non $S_n > x$). cela ne change rien au principe de l'algorithme. On s'arrange pour choisir les s_n de façon que les S_n "oscillent" autour de x et que $S_n \to x$. Pour ce faire, on choisit le premier indice pair non utilisé si l'on est en-dessous de x (on ajoute alors un terme positif et le premier indice impair sinon (on ajoute alors un terme négatif). Les suites (p_n) et

(q_n) permettent de savoir quel est le dernier indice pair ou impair utilisé ($2p_n$ ou $2q_n - 1$).

B. On procède par récurrence sur n.
  - Initialement, on a $q_1 = s_1 = 1$, $S_1 = -1$ et $p_1 = 0$ (cas $x < 0$) ou $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $S_1 = 1/2$ et $q_1 = 0$ (cas $x \geq 0$). Dans les deux cas, on a la propriété voulue.
  - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On doit encore distingur deux cas.
    - Si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.
    - Si $S_n \leq x$ alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.

  On en déduit que
$$\operatorname{card}\{s(1), \dots, s(n)\} = p_n + q_n = n$$
  ce qui indique que les $s(k)$ sont deux à deux distincts et que s est injective (si $s(a) = s(b)$ avec $a < b$ alors l'ensemble $\{s(1), \dots, s(b)\}$ contient au plus $b - 1$ éléments).

C.1. Soit (m_n) une suite d'entiers qui converge vers une limite ℓ. Par définition des limites (avec $\varepsilon = 1/3 > 0$)
$$\exists\, n_0/\ \forall n \geq n_0,\ |m_n - \ell| \leq 1/3$$
  Par inégalité triangulaire, on a $|m_n - m_r| \leq 2/3$ pour $n, r \geq n_0$ et comme on a des termes entiers, $m_r = m_n$ pour $n, r \geq n_0$. La suite est donc constante à partir du rang n_0.

C.2.
  a. La suite (p_n) est croissante (puisque p_{n+1} est égal à p_n ou à $1 + p_n$). Si elle est majorée, elle converge. Etant composée d'entiers, elle stationne à partir d'un certain rang n_0. Par définition, on a donc pour tout $n \geq n_0$, $S_n > x$ et $q_{n+1} = 1 + q_n$ ce qui donne (par récurrence) $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, pour $n \geq n_0$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2n - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1$. Ainsi,
$$\forall n \geq n_0,\ S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_{s_k} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}$$
  Le changement d'indice $j = k-1$ donne la formule voulue. La série associée à $\left(\frac{1}{2k-2n_0+2q_{n_0}+1}\right)_{k\geq n_0}$ est divergente positive et ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'égalité ci-dessus donne alors $S_n \to -\infty$ ce qui contredit $s_n > x$ pour tout $n \geq n_0$.

  b. La suite (p_n) étant croissante et non majorée, le théorème de limite monotone indique que $p_n \to +\infty$.

C.3. Le raisonnement est identique pour montrer que (q_n) est de limite infinie : c'est une suite croissante ; si elle est majorée alors elle converge et stationne à partir d'un rang n_0 ; pour $n \geq n_0$, on a $S_n \leq x$ et $S_n \to +\infty$ ce qui est incompatible.

C.4. Comme $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$ et $p_n \to +\infty$, les p_n décrivent tout $\mathbb{N}$. Il en est de même des q_n. Avec l'identité ensembliste de $I.B$, on en déduit que tout entier non nul est atteint par s (et pour un entier non nul car $s(0) = 0$). s est donc surjective de $\mathbb{N}^*$ dans lui même. On a aussi vu l'injectivité et on a donc la bijectivité.

D.1. On distingue deux cas.
  - Si $S_n > x$ alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair et
$$u_{s_{n+1}} \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq S_n - x$$
  - Si $S_n \leq x$ alors $u_{s_{n+1}} \geq 0$ car s_{n+1} est pair et
$$S_n - x \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq u_{s_{n+1}}$$

  $a \leq b \leq c$ entraînant $|b| \leq \max(|a|, |c|)$, on a donc dans tous les cas
$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|)$$
  ce qui correspond à l'alternative demandée.

D.2. Soit N un entier naturel. On ne peut avoir $\forall n > N,\ S_n > x$ (sinon, comme en $C.2.a$ on obtient une contradiction) et on ne peut avoir non plus $\forall n > N,\ S_n \leq x$ (cette fois comme en $C.2.b$). On peut, par exemple, trouver $n > N$ tel que $S_{n+1} \leq x < S_n$ (ou l'inverse). On a alors s_{n+1} impair et $u_{s_{n+1}} < 0$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} \leq x < S_n$. En particulier, $|S_n - x| = S_n - x \leq S_n - S_{n+1} = |u_{s_{n+1}}|$. *Remarque : il ne s'agit pas vraiment d'une "déduction" comme demandé.*

D.3. Comme (p_n) est de limite infinie, p_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geq n_1$). De même, q_n finit par être plus grand que 1 et

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2),\ p_n \geq 1 \text{ et } q_n \geq 1$$

D.4. Comme s_{n+1} vaut soit $2p_{n+1}$ soit $2q_{n+1} - 1$, la question $D.1$ montre que

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|) \leq \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|) = v_n$$

De plus, la croissance de p_n et q_n ainsi que la décroissance de $|u_n|$ donnent

$$|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n \text{ et } |u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n$$

On en déduit finalement que

$$v_{n+1} = \max(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|) \leq v_n$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par 0) et donc converge. Avec $D.2$,

$$\forall N,\ \exists n_N > N /\ 0 \leq v_{n_N} \leq u_{s(n_N+1)}$$

Quand $N \to +\infty$, $n_N \to +\infty$ et on peut passer à la limite ci-dessus (les termes admettent une limite) et on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

D.5. En particulier $0 \leq |S_n - x| \leq v_n \to 0$ et $S_n \to x$, ce que l'on voulait prouver (on a exhibé une bijection s telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$).

E.1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

$\sum(u_{n+1} - u_n)$ est ainsi absolument convergente et donc aussi convergente. Comme

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$$

on en déduit que (u_n) converge. En notant γ sa limite, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

E.2. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln(2n) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1) = \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

E.3.

a. On procède par récurrence sur n.

- Comme en B, le résultat est initialement vrai que $x > 0$ ou $x \leq 0$.

- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. Si $S_n > x$ alors on ajoute $u_{2q_{n+1}-1} = -\frac{1}{2q_{n+1}-1}$ et $p_{n+1} = p_n$. Sinon, on ajoute $u_{2p_{n+1}} = \frac{1}{2p_{n+1}}$ et $q_{n+1} = q_n$. La formule reste donc toujours vraie au rang $n+1$.

b. Comme p_n et q_n tendent vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(\ln(p_n) + \gamma + o(1)) - \left(\frac{1}{2}\ln(q_n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - \ln(2) + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

c. Comme $S_n \to x$, on a (continuité de exp) $\frac{p_n}{n-p_n} \to 4e^{2x}$ c'est à dire $\frac{n}{p_n} \to \frac{e^{-2x}}{4} + 1$ ou encore

$$p_n \sim \frac{4n}{e^{-2x}+4}$$

et de la même façon (en remplaçant p_n par $n - q_n$ dans la formule de la question précédente)

$$q_n \sim \frac{n}{1+4e^{2x}}$$

d. On prouve comme en a. que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_{s_n}| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$$

et, comme en b, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n} |u_{s_n}| = \frac{1}{2}\ln(p_n q_n) + \gamma + \ln(2) + o(1) \sim \frac{1}{2}\ln(p_n q_n)$$

Quand $x_n \to +\infty$ et $x_n \sim y_n$ alors $\ln(y_n) = \ln(x_n(1+o(1))) = \ln(x_n) + o(1) \sim \ln(x_n)$. On a donc ici

$$\ln(p_n q_n) \sim \ln\left(\frac{4n^2}{(4+e^{-2x})(1+4e^{2x})}\right) \sim 2\ln(n)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{s_1}| + \cdots + |u_{s_n}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|} = 1$$

(numérateur et dénominateur sont tous deux équivalents à $\ln(n)$).

2 Suites vérifiant (P_1) et (P_2).

A. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a

$$\forall n,\ |a_n u_n| \leq |a_n|$$

La convergence absolue de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(a_n u_n)$ et (P_1) est vérifiée.

B.1. Comme $\mathbb{C}$ est complet, la convergence de $\sum |a_{n+1} - a_n|$ entraîne celle de $\sum(a_{n+1} - a_n)$ ce qui, en revenant aux sommes partielles et grâce à un telescopage, équivaut à la convergence de la suite (a_n).

B.2. En posant $U_{-1}=0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}$$

On opère le changement d'indice $k=n-1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k$$

Supposons que $\sum(u_n)$ converge. La suite (U_n) converge donc. Comme elle est bornée et que $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question A indique que $\sum((a_n - a_{n+1})U_n)$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (produit de telles suites). L'égalité prouvée indique alors que $\sum(a_n u_n)$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite). On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n).

C. Posons $u_n = \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. On a alors, $a_n u_n = |a_n|$ (on le vérifie quand $|a_n| \neq 0$ et dans l'autre cas). Ainsi, $\sum(a_n u_n)$ diverge et on a (u_n) qui est bornée puisque formée d'éléments de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1).
Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont exactement celle dont la série associée converge absolument.

D.1. On applique les définitions de l'énoncé.

```
exemple:=proc(n)
local k,p,e,A,list ;
p:=0;e:=1;A:=9/4;list:=[[0,p,e,A]];
for k from 1 to n do
  if A>=p then p:=1+p;e:=e/2 fi;
  A:=A+e*9/(4*(k+1));
  list:=[op(list),[k,p,e,A]]
  od :
list
end:
```

Les six premiers termes trouvés sont

$$[0,0,1,\frac{9}{4}],\ [1,1,\frac{1}{2},\frac{45}{16}],\ [2,2,\frac{1}{4},3],\ [3,3,\frac{1}{8},\frac{393}{128}],\ [4,4,\frac{1}{16},\frac{1983}{640}],\ [5,4,\frac{1}{16},\frac{999}{320}]$$

D.2.

a. Supposons que la suite (p_n) stationne à partir d'un certain rang N. On a alors (ε_n) qui stationne à partir de ce même rang (quand p n'évolue pas, ε n'évolue pas) et donc

$$\forall n \geq N,\ A_n = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

Comme (a_n) est une suite de réels positifs de série divergente, les sommes partielles de cette série tendent vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_N > 0$ (tous les ε_k sont > 0 par récurrence), l'identité ci-dessus indique que $A_n \to +\infty$. Il existe donc $k \geq N$ tel que $A_k \geq p_k = p_N$ et alors $p_{k+1} = 1 + p_k \neq p_N$ ce qui est une contradiction.
Ainsi, la suite (p_n) ne stationne pas à partir du rang N et il existe $n > N$ tel que $p_n \neq p_{n-1}$ et donc tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$.
On peut alors montrer par récurrence que la suite (n_k) de l'énoncé est bien définie puisque si n_k est connu alors $\{n \in \mathbb{N}/\ n > n_k \ \text{ et }\ p_n = 1 + p_{n-1}\}$ est un ensemble non vide d'entiers et qu'il contient donc un minimum.

b. Pour $k \geq 1$, on a $n_k = \{n \in \mathbb{N} / \ n > n_{k-1} \ \text{ et } \ p_n = 1 + p_{n-1}\}$ et donc

$$p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}} = \cdots = p_{n_k - 1} \ \text{ et } \ p_{n_k} = 1 + p_{n_{k-1}}$$

d'où l'on déduit que

$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{n_{k-1}}$$

Comme $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, on en déduit par récurrence que

$$\forall k, \ p_{n_k} = k \ \text{ et } \ \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

(ε_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. De plus, $(\varepsilon_{n_k})_k$ est une extraite de $(\varepsilon_n)_n$ (la suite des n_k croît strictement) et est de limite nulle. Ainsi, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$$

De façon similaire, la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum(a_n \varepsilon_n)$ est croissante et on a une extraite qui tend vers $+\infty$ ($A_{n_k - 1} \geq p_{n_k - 1} = p_{n_{k-1}} = k - 1 \to +\infty$). On a donc $A_n \to +\infty$ et $\sum(a_n \varepsilon_n)$ qui diverge.

c. Au vu des termes calculés en $II.D.1$, pour la suite envisagée ici, on a

$$n_1 = 1, \ n_2 = 2, \ n_3 = 3$$

puisque $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $p_3 = 3$ (on gagne une unité à chacune de ces étapes).

D.3.

a. On gère un indice m tel que le dernier élément ajouté à la liste est $[m, u_{n_m}]$. Par rapport à la fonction `exemple`, on doit gérer l'évolution de m (et la liste construite n'est pas la même).

```
indexer:=proc(n)
local k,p,e,A,list,m;
p:=0;e:=1;A:=1;list:=[[0,0]];m:=0;
for k from 1 to n do
  if A>=p then p:=1+p;e:=e/2;m:=m+1;list:=[op(list),[m,k]] fi;
  A:=A+e/(k+1)
  od :
list
end:
```

b. On a vu plus haut que

$$A_{n_k - 1} \geq p_{n_k - 1} = p_{n_{k-1}} = k - 1$$

On a $k - 1 = p_{n_{k-1}} = \cdots = p_{n_k - 1}$ et $\frac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon_{n_{k-1}} = \cdots = \varepsilon_{n_k - 1}$. Si on suppose que $n_k - 2 > n_{k-1}$ alors $p_{n_k - 1} = p_{n_k - 2}$, $\varepsilon_{n_k - 1} = \varepsilon_{n_k - 2}$. Ainsi $A_{n_k - 2} \leq p_{n_k - 1}$ (sinon l'indice p aurait augmenté) et

$$A_{n_k - 1} = A_{n_k - 2} + a_{n_k - 1}\varepsilon_{n_k - 1} = A_{n_k - 2} + \frac{1}{n_k}\frac{1}{2^{k-1}} \leq (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

On en déduit que

$$A_{n_k} = A_{n_k - 1} + a_{n_k}\varepsilon_{n_k} \leq (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}} + \frac{1}{(1+n_k)2^k}$$

Comme $n_k \geq k$ et $k \geq 3$, on en déduit que

$$A_{n_k} \leq k - 1 + \frac{1}{k 2^{k-1}} + \frac{1}{(1+k)2^k} \leq k - 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} < k = p_{n_k}$$

et on a donc $p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $\varepsilon_{1+n_k} = \varepsilon_{n_k}$ puis

$$A_{1+n_k} = A_{n_k} + a_{1+n_k}\varepsilon_{1+n_k} = A_{n_k} + \frac{1}{(2+n_k)2^{n_k}} \leq k - 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} + \frac{1}{40} < k = p_{1+n_k}$$

ce qui donne $p_{2+n_k} = p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $n_{k+1} > 2 + n_k$.

c. Par définition,

$$A_{n_{k+1}-1} = A_{n_k-1} + \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j\varepsilon_j$$

Par définition de n_k et n_{k+1}, les ε_j ci-dessus valent tous $\varepsilon_{n_k} = 1/2^k$ et donc

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} = \frac{1}{2^k}\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j}$$

Une comparaison série-intégrale (avec la fonction décroissante $x \mapsto 1/x$) donne

$$\ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) = \int_{1+n_k}^{1+n_{k+1}} \frac{dt}{t} \leq \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j} \leq \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

et on a donc

$$\frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

d. Comme $n_3 - 2 = 49 > 2 = n_2$, on montre avec $D.3.b$ et une récurrence que

$$\forall k \geq 3,\ n_k - 2 > n_{k-1}$$

et on a ainsi

$$\forall k \geq 3,\ k - 1 \leq A_{n_k-1} \leq (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

De l'inégalité de droite, et comme $A_{n_{k+1}-1} \geq k$, on déduit que

$$A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^{k-1}n_k} + A_{n_{k+1}-1} - 1$$

ce que l'on peut écrire

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}n_k}$$

Avec la question précédente, on a alors

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geq 2^k(A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) \geq 2^k - \frac{2}{n_k}$$

On peut écrire par ailleurs que

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) = \ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

ce qui nous donne, avec la question précédente,

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k(A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

On utilise alors la question b et $k - 1 \leq A_{n_k-1}$ pour obtenir

$$A_{n_{k+1}-1} \leq k + \frac{1}{2^k n_{k+1}} \leq A_{n_{k-1}} + 1 + \frac{1}{2^k n_{k+1}}$$

et on combine les deux dernière ingéalités pour en déduire

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

e. La nature de la suite de terme général $w_k = \ln(n_k) - 2^k$ est la même que celle de la série de terme général

$$w_{k+1} - w_k = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) - 2^k$$

La question précédente donne

$$-\frac{2}{n_k} \leq w_{k+1} - w_k \leq \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

ce qui entraîne

$$|w_{k+1} - w_k| \leq \frac{2}{n_k} + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)$ est le terme général d'une série convergente car la suite de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$ converge (elle est de limite nulle puisque $n_k \to +\infty$). Ainsi, pour prouver que $\sum(w_{k+1} - w_k)$ converge absolument, il suffit de montrer que $\sum(1/n_k)$ converge. Or, on a évidemment

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

et donc, pour k suffisamment grand, $k - 1 \leq A_{n_k - 1} \leq \frac{1}{2}\ln(n_k)$ ou encore

$$\frac{1}{n_k} \leq e^{-2(k-1)}$$

ce qui montre que $\sum(1/n_k)$ est une série positive convergente. Finalement, (w_k) est une suite convergente.
En notant ℓ la limite de la suite (w_k), la continuité de l'exponentielle donne $e^{w_k} = n_k e^{-2^k} \to e^\ell$ et donc (comme $e^\ell \neq 0$)

$$n_k \sim Ce^{2^k} \quad \text{avec} \quad C = e^\ell$$

On a vu plus haut que si $x_n \sim y_n \to +\infty$ alors $\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$, on en déduit ici (en utilisant deux fois ce résultat) que

$$\ln(n_k) \sim 2^k \quad \text{et} \quad \ln(\ln(n_k)) \sim k\ln(2)$$

La question b donne alors (on a vu que l'inégalité de cette question est valable pour tout $k \geq 3$)

$$A_{n_k - 1} \sim k - 1 \sim k \sim \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

Soit n un entier. Il existe un entier k tel que $n_k - 1 \leq n \leq n_{k+1} - 1$. On remarque que n_k est de limite infinie quand $n \to +\infty$ (k dépend de n et est de limite infinie quand $n \to +\infty$ lui aussi). $\ln(\ln(n_k - 1)) \leq \ln(\ln(n)) \leq \ln(\ln(n_{k+1}))$ et majorant et minorant équivalent tous deux à $\ln(\ln(n_k))$ (et aussi à $k\ln(2)$). Ainsi $\ln(\ln(n_k)) \sim \ln(\ln(n))$. De plus on a l'encadrement $A_{n_k - 1} \leq A_n \leq A_{n_{k+1} - 1}$. Majorant et minorant sont tous deux équivalents à k c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$ c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}$. On a prouvé que

$$A_n \sim \frac{\ln(\ln(n))}{2}$$

Etant donnée la croissance de la suite (n_k), la fonction `indexer` risque fort de ne pas nous donner beaucoup d'éléments de cette suite !

E.

a. Soit (ε_n) une suite de limite nulle. On pose $\varepsilon'_n = \text{signe}(a_n)\varepsilon_n$. (ε'_n) est une suite de limite nulle et donc $\sum(a_n\varepsilon'_n) = \sum(\varepsilon_n|a_n|)$ converge.

b. Si $\sum |a_n|$ divergeait (par l'absurde), la question $II.D$ donnerait une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\sum |a_n|\varepsilon_n$ diverge et on obtiendrait une contradiction. Ainsi, $\sum |a_n|$ converge.

F.1. Supposons, par l'absurde, que (a_n) n'est pas bornée. Pour tout M et tout N, il existe un entier $n \geq N$ tel que $|a_n| \geq M$ (sinon, la suite $(a_n)_{n\geq N}$ est bornée et (a_n) l'est donc aussi). On peut ainsi construire par récurrence une suite n_k telle que $|a_{n_0}| \geq 1$ et

$$\forall k \geq 0,\ n_{k+1} = \min\{n > n_k /\ |a_n| \geq 2^{k+1}\}$$

Soit alors (x_n) telle que

$$\forall k,\ x_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

les autre x_n étant nuls. $\sum(x_n)$ converge (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$) et

$$\forall k,\ |x_{n_k} a_{n_k}| \geq 1$$

ce qui montre que $(x_n a_n)$ n'est pas de limite nulle et entraîne la divergence de $\sum(x_n a_n)$ en donnant une contradiction.

F.2. Par le même calcul qu'en $II.B.2$ on a

$$(*)\ :\ \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k)a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ est le terme général d'une série convergente (puisque (ε_k) converge) et donc $\sum(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k)a_k$ converge. De plus $\varepsilon_n a_{n+1} \to 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle). $(*)$ montre alors que $\sum(\varepsilon_n(a_{n+1} - a_n))$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite).

F.3. La question $II.E$ montre alors que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

F.4. On a prouvé que les suites vérifiant (P_2) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.