Centrale PSI2 2007
un corrigé

1 Généralités.

A.1. p est linéaire puisque

$$\forall X, X' \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ p(\lambda X + X') = \lambda p(X) + P(X')$$

Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, p est représentée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

P est de rang ≥ 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes) et comme p est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, par dimension P est de rang 2 et

$$\mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$$

Par théorème du rang, le noyau de p est de dimension 1. Comme il contient $(\alpha, \beta, 1) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\mathrm{Ker}(p) = Vect((\alpha, \beta, 1))$$

A.2. Ce sont les trois vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(-\alpha, -\beta)$.
B. La matrice de $\overline{p}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle vérifie $\overline{P}^2 = \overline{P}$ et $\overline{p}$ est donc un projecteur. C'est la projection sur l'image de $\overline{p}$ qui est $Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ dans la direction de son noyau qui est $Vect(\vec{\nu})$.
Soit $X_k = (-k\alpha, -k\beta, 1)$; on a $p(X_k) = (k + 1)(-\alpha, -\beta)$. On a donc

$$\|X_k\|^2 = k^2(\alpha^2 + \beta^2) + 1 \ \text{ et } \ \|p(X_k)\|^2 = (k + 1)^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

Lorsuqe k tend vers $+\infty$, $\|p(X_k)\|^2 - \|X_k\|^2$ tend vers $+\infty$ car $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ et on n'a donc pas $\|p(X)\| \leq \|X\|$ pour tout X de $\mathbb{R}^3$.
C.1. Par linéarité de p,

$$p(M_0 + \lambda\vec{u}) = p(M_0) + \lambda p(\vec{u})$$

et donc

$$p(M_0 + \mathbb{R}\vec{u}) = p(M_0) + \mathbb{R}p(\vec{u})$$

C.2. D'après la question précédente, l'image par p de la droite affine $D = M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$ est
- le point $p(M_0)$ si le vecteur directeur $\vec{u}$ de D est dans le noyau de p c'est à dire est colinéaire à $\vec{\nu}$;
- une droite dirigée par $p(\vec{u})$ sinon.

C.3. On suppose que D est dirigée par $\vec{u}$ et D' par $\vec{u'}$ où ni $\vec{u}$ ni $\vec{u'}$ n'est colinéaire à $\vec{\nu}$. D et D' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.
- Si D et D' sont sécantes elles possèdent un point commun Ω. On a alors $D = \Omega + \mathbb{R}\vec{u}$ et $D' = \Omega + \mathbb{R}\vec{u'}$ puis $p(D) = p(\Omega) + \mathbb{R}p(\vec{u})$ et $p(D') = p(\Omega) + \mathbb{R}p(\vec{u'})$ et droites sont sécantes (elles possèdent $p(\Omega)$ comme point commun).

Remarque : on peut penser que deux droites égales ne sont pas sécantes (convention de vocabulaire). Si c'était le cas, on aurait ici $(\vec{u}, \vec{u'})$ qui est libre et il faudrait montrer que $(p(\vec{u}), p(\vec{u'}))$ est aussi libre ce qui n'a pas de raison d'être ; il suffit que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{\nu}$ et $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{\nu}$ pour obtenir un contre-exemple avec deux droite sécantes non égales dont les images sont égales. Dans cet énoncé, "sécant" signifie donc "ayant au moins un point commun".

La réciproque est fausse. Si on suppose que $(\vec{u}, \vec{u'}, \vec{\nu})$ est libre alors $p(\vec{u})$ et $p(\vec{u'})$ seront indépendants (sinon on trouve une combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaire à $\vec{\nu}$) et les droites $p(D)$ et $P(D')$ seront sécantes car non parallèles dans le plan. Or, on peut choisir D dirigée par $\vec{u}$ et D' dirigée par $\vec{u'}$ non coplanaires et donc non sécantes (on prend $D = Vect(\vec{u})$ et $D' = A + Vect(\vec{u'})$ avec $\vec{OA}$ hors du plan $Vect(\vec{u}, \vec{u'})$.

- Si D et D' sont parallèles alors $(\vec{u}, \vec{u'})$ est liée et donc $(p(\vec{u}), p(\vec{u'}))$ l'est aussi (car p est linéaire et conserve les combinaisons linéaires) et $p(D)$ et $p(D')$ sont parallèles.
  La réciproque est fausse. Les droites $D = Vect(\vec{i} + \vec{\nu})$ et $D' = Vect(\vec{i} + 2\vec{\nu})$ sont non parallèles mais leurs images sont égales (à $Vect((1, 0))$).

C.4. Soit $Pi = M_0 + Vect(\vec{u}, \vec{u'})$ un plan affine (on suppose donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ indépendants). On montre comme en $C.1$ que

$$p(\Pi) = p(M_0) + Vect(p(\vec{u}), p(\vec{u'}))$$

$p(\Pi)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ dont la nature dépend de la dimension de $Vect(p(\vec{u}), p(\vec{u'})) = p(Vect(\vec{u}, \vec{u'}))$. On ditingues trois cas.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaire à $\vec{\nu}$, $p(\Pi)$ est réduit à un point.
- Sinon, si ν est combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{u'}$ alors $p(\Pi)$ est une droite affine.
- Sinon, $p(\Pi)$ est un plan affine c'est à dire $\mathbb{R}^2$ tout entier.

D.1. En notan $X = (x, y, z)$, un calcul élémentaire donne

$$q(X) = z(2\alpha x + 2\beta y + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z)$$

On a donc

$$\{X/\ q(X) = 0\} = \Pi_1 \cup \Pi_2 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \Pi_1 & : & z = 0 \\ \Pi_2 & : & 2\alpha x + 2\beta y + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z = 0 \end{array} \right.$$

Π_1 et Π_2 sont deux plan vectoriels (noyau de formes linéaires non nulles).
Soit $\Pi = M_0 + \Pi_i$ (avec $i \in \{1, 2\}$). Deux éléments M et M' de Π s'écrivent $M = M_0 + \vec{u}$ et $M' = M_0 + \vec{u'}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ dans Π_i. On a alors

$$\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|p(\vec{u} - \vec{u'})\|$$

Comme $\vec{u} - \vec{u'} \in \Pi_1$, $\|p(\vec{u} - \vec{u'})\| = \|\vec{u} - \vec{u'}\|$ et donc

$$\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|\vec{u} - \vec{u'}\| = \|\overrightarrow{MM'}\|$$

Les plans Π_1 et Π_2 sont ainsi représentés en vraie grandeur.

D.2. On remarque que $\|p(X)\| = \|\overline{p}(X)\|$ ($\overline{p}$ étant l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ introduit en question B). On a donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^3,\ q(X) = (X|X) - (\overline{p}(X)|\overline{p}(X)) = (X|X) - (X|\overline{p}^* \circ \overline{p}(X)) = (X|u(x)) \ \text{ avec } \ u = Id - \overline{p}^* \circ \overline{p}$$

u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $u^* = Id^* - \overline{p}^* \circ (\overline{p}^*)^* = Id - \overline{p}^* \circ \overline{p} = u$ et u est donc autoadjoint.
Comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormée, $\overline{p}^*$ est représenté dans cette base par la transposée de la matrice $\overline{P}$ représentant $\overline{p}$. On en déduit (calcul non détaillé) que u est représenté dans la base canonique par

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de u est alors (calcul là encore effectué au brouillon)

$$\chi_u = det(U - XI_3) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda - (\alpha^2+\beta^2))$$

u possède une valeur propre strictement négative (-1), une nulle et une strictement positive $(\alpha^2+\beta^2)$

E.1. Soit (u_1, u_2) une bas orthonormée de P (le cours assure qu'elle existe, il suffit d'ailleurs d'orthonormaliser une base quelconque par méthode de Schmidt). En posant $u_3 = u_1 \wedge u_2$, on obtient que (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

E.2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base orthonormée choisie. On sait que

$$\forall x, y \in R,\ 0 = q'(xe_1 + ye_2) = (xu'(e_1) + yu'(e_2)|xe_1 + ye_2)$$

En particulier ($x = 1$ et $y = 0$) $(u(e_1)|e_1) = 0$ et ($x = 0$ et $y = 1$) $(u(e_2)|e_2) = 0$. Les relation précédentes deviennent alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 = xy(u'(e_1)|e_2) + yx(u'(e_2)|e_1)$$

Pour $x = y = 1$, on obtient $(u'(e_1)|e_2) = -(u'(e_2)|e_1)$ et pour $x = 1$ et $y = -1$, on trouve $(u'(e_1)|e_2) = -(u'(e_2)|e_1)$. On a donc $(u'(e_1)|e_2) = (u'(e_2)|e_1) = 0$. Comme (e_1, e_2, e_3) est orthonormée, on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^3,\ X = (X|e_1)e_1 + (X|e_2)e_2 + (X|e_3)e_3$$

Les relations précédemment obtenues indiquent que

$$u'(e_1) = (u'(e_1)|e_3)e_3 \ \text{ et } \ u'(e_2) = (u'(e_2)|e_3)e_3$$

En posant $a = (u'(e_1)|e_3)$ et $b = (u'(e_2)|e_3)$, la matrice de u' dans la base choisie s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & ? \\ a & b & ? \end{pmatrix}$. Comme u' est autoadjoint et que la base est orthonormée, cette matrice est symétrique et on a donc M du type

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

On remarque que $c = (u(e_3)|e_3)$.

E.3. Soit $X \in \mathbb{R}^3$. On peut l'écrire $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et alors $u'(X) = aze_1 + bze_2 + (ax+by+cz)e_3$. Comme la base est orthonormée, on a alors

$$q'(X) = (u'(X)|X) = z(2ax + 2by + cz)$$

L'ensemble des X tels que $q'(X) = 0$ est la réunion des deux plan d'équations cartésiennes $z = 0$ et $2ax + 2by + cz = 0$ dans la base choisie. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, les normales à ces plans ne sont pas colinéaires et les deux plans sont distincts.

E.4. Discutons !

- Si $a = b = c = 0$ le rang de u' est nul.
- Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$ alors le rang vaut 1.
- Si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors l'une des colonnes 1 ou 2 de M est non nulle et l'autre lui est proportionnelle. La troisième est indépendante et le rang vaut donc 2.

2 L'image d'une sphère.

A.1. On a $p(x,y,0)=\xi$ et donc $p(M)=\xi$ si et seulement si $M-(x,y,0)\in \mathrm{Ker}(p)=Vect(\vec{\nu})$. On a ainsi

$$p^{-1}(\{\xi\})=(x,y,0)+Vect(\vec{\nu})=D_\xi$$

ξ est dans $p(S)$ si et seulement s'il existe $M\in S$ tel que $p(M)=\xi$ c'est à dire si et seulement s'il existe $M\in S$ tel que $M\in D_\xi$ ou encore si et seulement si $S\cap D_\xi\neq\emptyset$.
Les éléments de D_ξ sont ceux qui s'écrivent $(x,y,0)+t\vec{\nu}$ c'est à dire $(x+t\cos(\theta),y+t\sin(\theta),t)$. Il existe donc un élément commun à D_ξ et S si et seulement si on peut trouver un t réel tel que

$$(x+t\cos(\theta))^2+(y+t\sin(\theta))^2+t^2=R^2$$

A.2. L'équation précédente en t est polynomiale de degré 2. Son discriminant réduit vaut

$$(y\sin(\theta)+x\cos(\theta))^2-2(x^2+y^2-R^2)$$

Elle admet une solution si et seulement si ce discriminant est positif c'est à dire si

$$\Phi(x,y)=2(x^2+y^2)-(y\sin(\theta)+x\cos(\theta))^2\leq 2R^2$$

A.3.

- Le nouveau repère est (O,e_1,e_2) avec $e_1=(\cos(\theta),\sin(\theta))$ et $e_2=(-\sin(\theta),\cos(\theta))$. La formule de changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Les relations voulues sont

$$x'=\cos(\theta)x+\sin(\theta)y \quad \text{et} \quad y'=-\sin(\theta)x+\cos(\theta)y$$

- Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$ une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est donc $2(x'^2+y'^2)-x'^2=2R^2$ c'est à dire

$$x'^2+2y'^2=2R^2$$

- Ceci est l'équation d'une ellipse de sommets $A_1=(-\sqrt{2}R,0)$, $A_2=(\sqrt{2}R)$, $B_1=(0,-R)$ et $B_2=(0,R)$. (A_1A_2) est le grand axe (axe focal) et est de demi-longueur $\sqrt{2}R$. (B_1B_2) est l'autre axe et sa demi-longeur est R. L'excentricité vaut alors $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (avec les notations classiques, $a^2=2R^2$ et $b^2=R^2$ donnent e avec la relation $(1-e^2)a^2=b^2$). On a aussi des foyers $F'=(-R,0)$ et $F=(R,0)$ (toujours avec les notations classiques, $c^2=a^2-b^2=R^2$ donc $c=R$).
- La question $A.2$ montre qu'un point M est dans $p(S)$ si ses coordonnées x' et y' dans $\mathcal{R}'$ vérifient

$$2(x'^2+y'^2)-x'^2=2R^2$$

c'est à dire si et seulement si M est "à l'intérieur" de l'ellipse $\mathcal{E}$ (qui délimite le plan en deux parties, l'une ou $2(x'^2+y'^2)-x'^2$ est >0 et l'autre où cette quantité est <0).

B.1. Si $\xi\in\mathcal{E}$, le discriminant évoqué à la question $A.2$ est nul et l'équation de la question $A.1$ admet une unique solution $t_0=-\frac{y\sin(\theta)+x\cos(\theta)}{2}$. D'après $A.1$, ξ admet un unique antécédent par p dans S qui est

$$\pi(\xi)=(x,y,0)+t_0\vec{\nu}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}-\frac{y\sin(\theta)+x\cos(\theta)}{2}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 1\end{pmatrix}$$

B.2. Avec la formule précédente, on obtient élémentairement

$$\forall \xi = (x, y) \in \mathcal{E},\ (\pi(\xi)|\vec{\nu}) = 0$$

ce qui montre que tout élément de Σ (élément s'écrivant $\pi(\xi)$ avec $\xi \in \mathcal{E}$) est orthogonal à $\vec{\nu}$.

B.3. Soit $X = (x, y, z) \in S$ $(x^2 + y^2 + z^2 = R^2)$. On suppose que $(\vec{\nu}|X) = 0$ c'est à dire que $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + z = 0$. On a $p(X) = (x - z\cos(\theta), y - z\sin(\theta))$ et donc

$$\Phi(p(X)) = 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z(x\cos(\theta) + y\sin(\theta))) - (x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - z)^2$$

Comme $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = -z$, on obtient

$$\Phi(p(X)) = 2(x^2 + y^2 + 2z^2) - 4z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2R^2$$

et ainsi $\Phi(p(X)) \in \mathcal{E}$.

On vient de voir que Σ est constitué des éléments de S qui sont dans le plan vectoriel P_0 orthogonal à $\vec{\nu}$. Σ est l'intersection de P_0 avec S et c'est un cercle. Σ étant envoyé sur $\mathcal{E}$ par p n'est pas représenté en vrai grandeur (les antécedents des sommets du grand axe donnent un contre-exemple).

C.1. p_0 est une application linéaire de P_0 dans $\mathbb{R}^2$. Son noyau est constitué des éléments de P_0 dans le noyau de p c'est à dire des vecteurs simultanément colinéaires et orthogonaux à $\vec{\nu}$. Seul le vecteur nul convient et p_0 est injective. Comme elle va d'un espace de dimension 2 dans un espace de dimension 2, c'est un isomorphisme de P_0 dans $\mathbb{R}^2$.

C.2.

- s va bien de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $s^{-1} = p_1^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ p_0^{-1} = p_0 \circ \sigma \circ p_1 = s$. s est donc une involution linéaire de $\mathbb{R}^2$.
- s est donc la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ de direction $\mathrm{Ker}(s + Id)$. Ses sous espaces propres sont $E_1(s) = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $E_{-1}(s) = \mathrm{Ker}(s + Id)$. On a $s(x) = x$ si et seulement si $\sigma(p_1(x)) = p_1(x)$ c'est à dire si et seulement si $p_1(x) \in E_1(\sigma)$ ou encore $x \in p_0(E_1(\sigma))$. C'est la même chose pour l'autre sous-espace :

$$E_1(s) = p_0(E_1(\sigma)) \quad \text{et} \quad E_{-1}(s) = p_0(E_{-1}(\sigma))$$

- On a $p(\Sigma) = \mathcal{E}$ et comme $\Sigma \subset P_0$ ceci s'écrit aussi $p_0(\Sigma) = \mathcal{E}$ ou encore $\Sigma = p_1(\mathcal{E})$. Comme p_0 est bijective, on a

$$s(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} \iff \sigma(p_1(\mathcal{E})) \subset p_1(\mathcal{E})$$

ce qui équivaut bien à Σ stable par σ.

3 Balayage de $p(S)$ par des cercles.

A. En revenant aux coordonnées, un calcul élémentaire montre que

$$(p \circ \Gamma)'(t) = p(\Gamma'(t))$$

Si $\Gamma'(t_0)$ n'est pas dans $Vect(\vec{\nu}) = \mathrm{Ker}(p)$, on a donc $(p \circ \Gamma)'(t_0)$ qui est non nul. $p(\Gamma(t_0))$ est donc régulier et la tangente à l'arc est dirigée par $(p \circ \Gamma)'(t_0)$.

B.1. Un élément $(x, y, R\sin(\delta))$ est sur S si et seulement si $x^2 + y^2 = R^2\cos^2(\delta)$. L'intersection de (S) et du plan $z = R\sin(\delta)$ est donc un cercle de centre $(0, 0, R\sin(\delta))$ et de rayon $R\cos(\delta)$. En paramétrant ce cercle dans le plan, on obtient un paramétrage de C_δ :

$$\phi \mapsto M_\delta(\phi) = \begin{pmatrix} R\cos(\delta)\cos(\phi) \\ R\cos(\delta)\sin(\phi) \\ R\sin(\delta) \end{pmatrix}$$

B.2. On peut trouver un élément dans P_0 et C_δ si et seulement si on peut trouver ϕ tel que $(\overrightarrow{OM_\delta(\phi)}|\vec{\nu}) = 0$ c'est à dire si et seulement si il existe ϕ tel que

$$\cos(\delta)\cos(\phi-\theta)+\sin(\delta)=0$$

Si $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, ceci n'a pas lieu. Pour $\delta \in]-\pi/2, \pi/2[$, la relation s'écrit $\cos(\phi-\delta) = -\tan(\delta)$ et ϕ existe si et seulement si $\tan(\delta)| \leq 1$ c'est à dire $|\delta| \leq \pi/4$.
Si $|\delta| < \pi/4$, deux valeurs de ϕ conviennent qui sont

$$\delta \pm \arccos(-\tan(\delta))$$

L'un d'elle est dans $[\delta, \delta+\pi]$ et l'autre dans $[\delta-\pi, \delta]$. Elles ne sont pas égales modulo 2π car $\arccos(-\tan(\delta)) \neq 0$ et correspondent à deux points distincts de C_δ.

B.3. On a $M \in P_0 \cap C_\delta \subset P_0 \cap S = \Sigma$.
P_0 est un plan vectoriel (il contient donc l'origine) qui contient M. Il contient donc $\overrightarrow{OM}$ et, par définition de P_0, ce vecteur est donc orthogonal à $\vec{\nu}$.
On a $\frac{dM_\delta}{d\phi}(\phi) = \begin{pmatrix} -R\cos(\delta)\sin(\phi) \\ R\cos(\delta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est toujours orthogonal à $\overrightarrow{OM_\delta(\phi)}$ (produit scalaire nul).
Σ est un cercle de centre O dans le plan P_0. Un vecteur tangent à Σ en M est contenu dans P_0 et est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ (la tangente au cercle est orthogonale au rayon).

B.4. $p(C_\delta)$ est paramétré par $\phi \mapsto (R\cos(\delta)\cos(\phi) - R\sin(\delta)\cos(\theta), R\cos(\delta)\sin(\phi) - R\sin(\delta)\sin(\theta)$.
C'est un cercle de centre

$$\Omega_\delta = (R\sin(\delta)\cos(\theta), R\sin(\delta)\sin(\theta))$$

et de rayon

$$R_\delta = R\cos(\delta)$$

La réunion des C_δ pour $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$ étant égale à S, la réunion de $p(C_\delta)$ est égale à $p(S)$.
On suppose $|\delta| < \pi/4$. On peut trouver $(B.2)$ $\phi_0, \phi_1 \in [0, 2\pi[$ tels que $M_0 = M_\delta(\phi_0)$ et $M_1 = M_\delta(\phi_1)$ soient dans P_0. Par définition de Σ, $p(M_0)$ et $p(M_1)$ sont sur $\mathcal{E}$ (ce sont des images par p d'éléments de Σ) et ces points sont distincts (un élément de $\mathcal{E}$ possède un unique antécédent par p dans S).
Notons $\vec{T}$ un vecteur tangent en M_i à C_δ et $\vec{T'}$ un vecteur tangent en M_i à Σ (ce sont des vecteurs non colinéaires à $\vec{\nu}$ ce qui va nous permettre plus bas d'utiliser la question A). $\vec{T}$ est dans l'orthogonal de $\overrightarrow{OM_i}$ et ce vecteur est lui même orthogonal à $\vec{\nu}$ et à $\vec{T'}$ (question $B.3$). $\vec{T}$ est donc dans le plan $Vect(\vec{T'}, \vec{\nu})$. Les tangentes à $p(C_\delta)$ et $\mathcal{E} = p(\Sigma)$ en $p(M_i)$ seront dirigées par $p(\vec{T})$ et $p(\vec{T'})$ (question A) et comme $p(\vec{\nu}) = \vec{0}$, la composante de $\vec{T}$ sur $\vec{\nu}$ disparaît dans la composition par p et les vecteurs $p(\vec{T})$ et $p(\vec{T'})$ sont colinéaires. $P(C_\delta)$ et $\mathcal{E}$ sont donc tangents en deux points distincts.
Pour $\delta = \pi/4$, c'est la même chose sauf qu'il n'existe qu'un point commun.

B.5. Soient C_1 et C_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 et de rayons R_1 et R_2. Quitte à inverser les rôles, on peut supposer $R_1 \geq R_2$. On a alors C_2 qui est intérieur à C_1 si $d(O_1, O_2) + R_2 \leq R_1$ et C_2 qui est extérieur à C_1 si $d(O_1, O_2) \geq R_1 + R_2$. Les cercles sont donc sécants quand $R_1 - R_2 \leq d(O_1, O_2) \leq R_1 + R_2$. Ici, on a

$$d(\Omega_\delta, \Omega_{\delta'}) = R|\sin(\delta) - \sin(\delta')|$$

$$R_\delta + R'_\delta = R(\cos(\delta) + \cos(\delta'))$$

$$R_\delta - R'_\delta = R|\cos(\delta) - \cos(\delta')|$$

- Si $0 \leq \delta < \delta' \leq \pi/4$, on veut montrer que

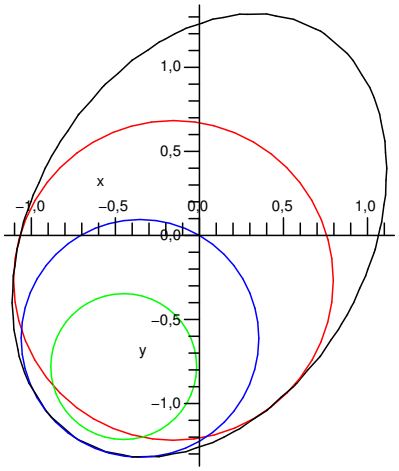
$$\cos(\delta) - \cos(\delta') \leq \sin(\delta') - \sin(\delta) \quad \text{et} \quad \sin(\delta') - \sin(\delta) \leq \cos(\delta) + \cos(\delta')$$

  ce qui équivaut à

$$\sin(\delta + Pi/4) \leq \sin(\delta' + \pi/4) \quad \text{et} \quad \sin(\delta' - \pi/4) \leq \sin(\delta + Pi/4)$$

  ce qui est vrai pour les valeurs considérées. Les cercles $p(C_\delta)$ et $p(C_{\delta'}$ sont ainsi sécants.
- Si $Pi/4 \leq \delta < \delta' \leq \pi/2$, $R_{\delta'}$ est le plus petit des deux rayons. On veut montrer que

$$\cos(\delta) - \cos(\delta') \geq \sin(\delta') - \sin(\delta)$$

  ce qui est vrai car $\sin(\delta + Pi/4) \geq \sin(\delta' + \pi/4)$ (décroissance du sinus sur $[pi/2, 3\pi/4]$). $p(C_{\delta'})$ est intérieur à $p(C_\delta)$.

C. Voici le dessin demandé.