Centrale 2006 -PSI
seconde épreuve : corrigé

Partie I.

A.1. Il s'agit de reprouver un résultat de cours dans le cas particulier de matrices d'ordre 2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ des éléments de E. On a

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

On en déduit (vérification simple) que

$$Tr(AA') = Tr(A'A) \quad \text{et} \quad \det(AA') = \det(A)\det(A') = \det(A'A)$$

Si $A, B \in E$ sont semblables alors il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors

$$Tr(A) = Tr(P^{-1}BP) = Tr(BPP^{-1}) = Tr(B)$$

et de même $\det(A) = \det(B)$. Ainsi, la trace et le déterminant sont des invariants de similitude et (par sa définition) il en est de même du polynôme caractéristique (si A et B sont semblables, $A - xI_2$ et $B - xI_2$ le sont par la même matrice de passage).

La réciproque est fausse puisque I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (la seule matrice semblable à I_2 est I_2) mais ont même trace (2) et même polynôme caractéristique ($(x-1)^2$).

A.2. En notant $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, on a

$$Tr({}^tM_1M_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

En identifiant E et $\mathbb{R}^4$, ϕ correspond au produit scalaire canonique.

A.3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a

$$\det(M) = ad - bc = \frac{1}{2}\Phi(M, N) \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Remarque : N est la comatrice de M.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans E, on a donc

$$|\det(M)| \le \frac{1}{2}\|M\|.\|N\| = \frac{1}{2}\|M\|^2 = \frac{1}{2}Tr({}^tMM)$$

Il n'y a égalité que si (M, N) est une famille liée c'est à dire si $M = 0$ ou $N = \lambda M$ avec λ réel.

- $N = \lambda M$ alors $d = \lambda a$ et $a = \lambda d$ et donc $d(1-\lambda^2) = a(1-\lambda^2) = 0$ et de même $b(1-\lambda^2) = c(1-\lambda^2) = 0$. Si $M \neq 0$ alors $\lambda^2 = \pm 1$ et $\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$.
- Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées alors (M, N) est liée.

Les conditions trouvées englobant le cas de la matrice nulle, il n'y a égalité que pour les matrices du type

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

A.4. Un calcul immédiat donne

$$\chi_M(x) = x^2 - Tr(M)x + \det(M)$$

1 est valeur propre si et seulement si $\chi_M(1) = 0$ c'est à dire

$$Tr(M) = 1 + \det(M)$$

B.1. Par théorème généraux (on fait des sommes et des produits de fonctions continues), ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est, comme $\theta \mapsto P(\theta)$, 2π-périodique. Ses bornes sur $\mathbb{R}$ sont donc celle sur le segment $[0, 2\pi]$ et, sur ce segment, la fonction continue est bornée et atteint ses bornes. En particulier ϕ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ en un certain θ_1.
Par théorèmes généraux, ϕ est dérivable. Comme $\mathbb{R}$ est un ouvert, ϕ atteint son maximum en un point critique et on a donc $\phi'(\theta_1) = 0$. Comme

$$\phi(\theta) = (a+d)\cos(\theta) + (b-c)\sin(\theta)$$

on a donc (en écrivant $\phi'(\theta_1) = 0$)

$$c\cos(\theta_1) + d\sin(\theta_1) = -a\sin(\theta_1) + b\cos(\theta_1)$$

relation qui indique que les coefficients $1, 2$ et $2, 1$ de $MP(\theta_1)$ sont égaux, c'est à dire que cette matrice est symétrique.

B.2. $MP(\theta_1)$ est donc diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral) et il existe une matrice orthogonale (que l'on peut supposer directe quitte à échanger ses colonnes) Q telle que $D = Q^{-1}MP(\theta_1)Q$ soit diagonale. Les éléments de O_2 étant exactement les matrices $P(\theta)$, il existe t tel que $Q = P(\theta)$. On a alors $Q^{-1} = P(-t)$ et

$$M = QDQ^{-1}P(-\theta_1) = P(t)DP(-t-\theta_1)$$

B.3. On a $M_0P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$. En choisissant $\theta = -\pi/4$, on obtient la matrice $N_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sont vecteurs propres pour N_0 et ainsi

$$P(\pi/4)N_0P(-\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a

$$M_0 = P(-\pi/4)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}P(\pi/2)$$

C. On calcule

$$^tBB = {}^tV^tA^tUUAV$$

Comme U et V sont orthogonales, ceci peut s'écrire

$$^tBB = V^{-1t}AAV$$

ce qui montre que ^tBB et ^tAA sont semblables.

Partie II.

A. Notons $|||.|||$ la norme subordonnée à $\|.\|$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. En identifiant E et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on obtient aussi une norme sur E. On rappelle que

$$|||M||| = \max_{\substack{X\in\mathbb{R}^2\\ X\neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

On a donc

$$\mathcal{R} = \{M \in E/\ \ |||M||| \leq 1\}$$

B.1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$. On a alors $\|(a,c)\| = \|M(1,0)\| \leq \|(1,0)\| = 1$ et donc $|a|, |c| \leq 1$. De même $|b|, |c| \leq 1$ en prenant l'image par M de $(0,1)$.
$\mathcal{R}$ s'interprète immédiatement comme la boule unité fermée de E pour la norme $|||.|||$. C'est donc un compact (fermé borné en dimension finie, la norme étant indifférente).

B.2. Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{R}$ et $t \in [0,1]$. Par inégalité triangulaire et homogénéité, on a

$$|||(1-t)M_1 + tM_2||| \leq (1-t)\,|||M_1||| + t\,|||M_2||| \leq (1 - t + t = 1$$

et donc $(1-t)M_1 + tM_2 \in \mathcal{R}$.

C.1. Supposons que $M \in \mathcal{R}$. On a alors

$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \leq \|X\|^2 = {}^tXX$$

Réciproquement, si cette relation est vérifiée alors $\forall X,\ \|MX\| \leq \|X\|$ et $M \in \mathcal{R}$.

C.2.a. ${}^tMM$ est symétrique réelle et donc diagonalisable. En notant λ_1, λ_2 les valeurs propres (éventuellement égales), la matrice est semblable à $diag(\lambda_1, \lambda_2)$ et son polynôme caractéristique est donc $(x - \lambda_1)(x-\lambda_2)$.
En notant X un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, on a ${}^tMMX = \lambda_i X$ et donc

$$\lambda_i\|X\|^2 = (X|{}^tMMX) = \|MX\|^2 \geq 0$$

et comme $\|X\| \neq 0$ (X est non nul comme vecteur propre), $\lambda_i \geq 0$.

C.2.b. Si $M \in \mathcal{R}$ alors pour tout X, $\|MX\| \leq \|X\|$ et le calcul précédent indique que $\lambda_i \in [0,1]$.
Réciproquement (et en contraposant), si $\lambda_i \notin [0,1]$ alors $\lambda_i > 1$ (on sait que $\lambda_i \geq 0$) et, pour X vecteur propre associé, $\|MX\| = \lambda_i\|X\| > \|X\|$ ce qui donne $M \notin \mathcal{R}$.

D. On garde les notations de $C.2$.
Si $M \in \mathcal{R}$, on a $Tr({}^tMM) = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$. De plus 1 n'est pas entre les racines du polynôme caractéristique P de ${}^tMM$ et donc $P(1) \geq 0$. ceci donne $Tr({}^tMM) \leq 1 + \det({}^tMM) = 1 + (\det(M))^2$.
Réciproquement, si les relations précédentes sont vérifiées alors $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ ou $1 \leq \lambda_1, \lambda_2$ (puisque les λ_i sont positifs et que 1 n'est pas entre les deux). Comme $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$ on est forcément dans le premier cas et $M \in \mathcal{R}$.

E.1. Si $M \in \mathcal{S}$ alors $M \in \mathcal{R}$ le polynôme caractéristique de ${}^tMM$ est du type $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ avec $\lambda_i \in [0,1]$. Soit (X_1, X_2) une base orthonormée de diagonalisation de ${}^tMM$ (il en existe une par théorème spectral). Un élément $X \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $a_1X_1 + a_2X_2$ et $\|X\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (car le base est orthonormée). On a $\|MX\| = \|\lambda_1 a_1 X_1 + \lambda_2 X_2\| = \sqrt{\lambda_1^2 a_1^2 + \lambda_2^2 a_2^2}$. Si (par l'absurde) $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1[$ alors $\forall X \neq 0,\ \|MX\| < \|X\|$ ce qui contredit $M \in \mathcal{S}$. Le polynôme caractéristique de ${}^tMM$ est donc du type $(x-\lambda)(x-1)$ avec $\lambda \in [0,1]$.
Réciproquement, si ceci a lieu alors $M \in \mathcal{R}$ et pour X_0 vecteur propre associé à 1 on a $\|MX_0\| = \|X_0\|$. Ainsi $M \in \mathcal{S}$.

E.2.a. On a

$$^tMM = P(-t_2)DP(-t_1)P(t_1)DP(t_2) = P(-t_2)D^2P(t_2) = P(t_2)^{-1}D^2P(t_2)$$

^tMM est donc semblable à D^2 et ses valeurs propres sont α^2 et β^2.

E.2.b. Si $M \in \mathcal{S}$ alors $\alpha^2 \in [0,1]$ et $\beta^2 = 1$. Ainsi $\alpha \in [-1,1]$ et $\beta = 1$. On a la décomposition voulue avec $\gamma = \alpha$, $U = P(t_1)$ et $V = P(t_2)$.
Réciproquement, si M se décompose ainsi alors (calcul identique à celui de E2a) ^tMM est semblable à $diag(\gamma^2, 1)$. D'après $E1$, $M \in \mathcal{S}$.

E.3. Soit $M \in \mathcal{S}$ et $M = Udiag(\gamma, 1)V$ une décomposition du type précédent. Supposons M non orthogonale. On a alors $\gamma \in]-1,1[$ (sinon $\gamma = \pm 1$ et M est orthogonale comme produit de matrice orthogonales). Soient $W = UV$ et $W' = Udiag(-1,1)V$. ce sont des matrices orthogonales (produit de telles matrices) et on a

$$M = (1-t)W + tW' \text{ avec } t = \frac{1-\gamma}{2} \in [0,1]$$

F.1. On a

$$E_1 = Vect\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),\ E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

et ce sont donc bien des sous-espaces vectoriels. Ils sont en outre de dimension 2 (les familles génératrices trouvées sont clairement libres). Pour montrer que ces espaces sont supplémentaires dans E, il suffit de montrer qu'ils sont en somme directe et il suffit donc de montrer qu'ils sont orthogonaux (ce seront alors des supplémentaires orthogonaux). On le vérifie en calculant

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}\right) = 0$$

F.2. Les matrices orthogonales directes sont les $P(\theta)$ et sont donc dans E_1. Celles indirectes sont les $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$ et sont dans E_2.

F.3. Soit $M \in E_1 \cap \mathcal{S}$; notons $t = Tr(^tMM)$. Comme 1 est valeur propre, $IA4$ donne $t = 1 + \det(M)^2$. La question $IA3$ indique que $|\det(M)| = \frac{t}{2}$. On a donc $t = 1 + \frac{t^2}{4}$ c'est à dire $t = 2$. Les calculs de IIC donnent alors $^tMM = I_2$ (on doit avoir deux valeurs propres égales à 1) et M est orthogonale.
De la même façon, les éléments de $E_2 \cap \mathcal{S}$ sont des matrices orthogonales.
Soit M une matrice non orthogonale de $\mathcal{S}$.
Si $M = tW + (1-t)W'$ avec $t \in [0,1]$ et W, W' orthogonales. W et W' ne sont pas directes toutes deux (car sinon $tw, (t1-t)W \in E_1$ et donc $M \in_1 \cap \mathcal{S}$ ce qui entraîne son orthogonalité). De même W et W' ne sont pas indirectes toutes deux. Ainsi $tW \in E_1$ et $(1-t)W' \in E_2$ (ou l'inverse). Comme M possède une unique décomposition sur $E_1 \oplus E_2$, il y a au plus une choix possible du segment $[W, W']$.
Comme il y a un choix possible, il y en a exactement un.

Partie III.

A.1. Si $M \in \mathcal{S}$ alors 1 est valeur propre de ^tMM et donc (IA4) $^tMM = 1 + \det(^tMM) = 1 + (\det(M))^2$. Cette relation s'écrit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

A.2.a. Supposons cette condition vérifiée. Comme en IIC et IID, on a donc $P(1) = 0$ où P est le polynôme caractéristique de ${}^tMM$. 1 est donc valeur propre de ${}^tMM$ et $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si l'autre valeur propre est inférieure à 1 c'est à dire si et seulement si

$$(\det(M))^2 \leq 1$$

A.2.b. Soit $M \in \mathcal{H}$. Comme ci-dessus, 1 est donc valeur propre de ${}^tMM$ et $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si l'autre valeur propre est inférieure à 1. Or cette deuxième valeur propre vaut $Tr({}^tMM) - 1$ et la CNS devient

$$Tr({}^tMM) \leq 2$$

III.B.1. Un calcul immédiat donne

$$\forall (A, B) \in E_1 \times E_2,\ \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

III.B.2. Soit $t \in \mathbb{R}$; $(1 - t)W \in E_1$ et $tW' \in E_2$. Soit $M = (1 - t)W + tW'$. La question précédente donne

$$\det(M) = \det((1 - t)W) + \det(tW') = (1 - t)^2 \det(W) + t^2 \det(W') = 1 - 2t$$

Par ailleurs, comme E_1 et E_2 sont orthogonaux, on a (Pythagore)

$$\Phi(M, M) = (1 - t)^2\Phi(W, W) + t^2\Phi(W', W') = 2(1 - t)^2 + 2t^2$$

On en déduit que

$$\Phi(M, M) = 1 + (\det(M))^2$$

ce qui traduit que $M \in \mathcal{H}$. La droite (WW') est donc incluse dans $\mathcal{H}$.

Partie IV.

A. On a $\Phi(tM, tM) = t^2\Phi(M, M) = t^2 Tr({}^tMM) = t^2(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $(\det(tM))^2 = t^4(\det(M))^2 = t^4\lambda_1\lambda_2$. tM est dans $\mathcal{H}$ si ces quantités sont égales c'est à dire si t^2 est racine de $P = \lambda_1\lambda_2X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + 1$.

- Si $\lambda_1 = 0$ (et alors $\lambda_2 \neq 0$ car $M \neq 0$) alors P admet une solution positive et on n'a $tM \in \mathcal{H}$ que pour un choix de $t \geq 0$.
- Sinon, P est de degré 2 et son discriminant vaut $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Si $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ alors P a une unique racine qui est positive et on n'a $tM \in \mathcal{H}$ que pour un choix de $t \geq 0$. Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ alors P a deux racines positives et on a $tM \in \mathcal{H}$ pour deux valeurs de $t \geq 0$.

Les cas particuliers sont ceux où M n'est pas inversible (0 est valeur propre de ${}^tMM$) et celui où ${}^tMM$ est une matrice scalaire (deux valeurs propres égales) c'est à dire où M est un multiple d'une matrice orthogonale c'est à dire encore si $M \in E_1$ ou $M \in E_2$.

B.1. $M_1(x, y)$ est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée c'est à dire si $x^2 = 2$ et $y = 0$. Les matrice orthogonales de P_1 sont donc I_2 et $-I_2$.

B.2.a. $M_1(x, y)$ est dans $\mathcal{H}$ si $x^2 + y^2 = 1 + \frac{x^4}{4}$. Cette condition s'écrit

$$(x^2 + 2y - 2)(x^2 - 2y - 2)$$

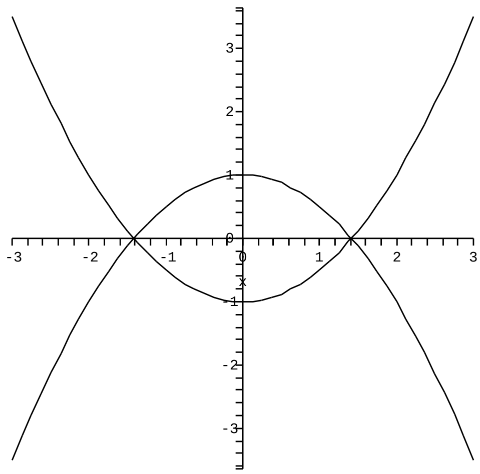
et on obtient la réunion de deux paraboles :

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y)/\ x^2 + 2y - 2 = 0\} \text{ et } \mathcal{C}_2 = \{(x, y)/\ x^2 - 2y - 2 = 0\}$$

Un calcul élémentaire donne

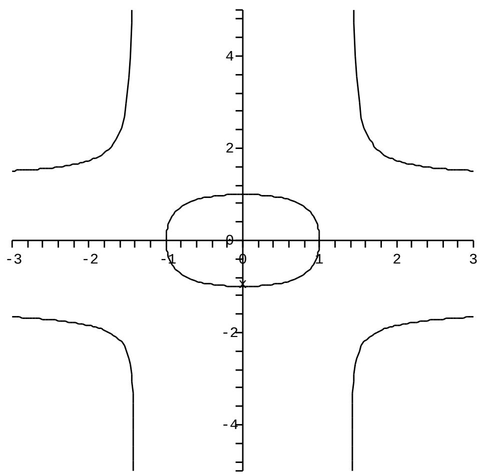
$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)\}$$

B.2.b. La représentation de $\mathcal{H} \cap P_1$ est la suivante.



La partie correspondant à $\mathcal{S} \cap P_1$ est celle pour $x^2 \leq 2$ (on doit ajouter la condition $(\det(M))^2 \leq 1$) ce qui donne la partie "close" du dessin.

C. L'équation s'écrit $y^2(x^2-2) = 2x^2 - 2$. Si $x^2 \in]1,2]$, cette équation n'admet pas de solution. Sinon, il y en a deux $y = \pm\sqrt{2 + \frac{2}{x^2-2}}$. Le tracé correspondant est le suivant



La partie correspondant à $\mathcal{S} \cap P_2$ est celle, comme à la question précédente, pour laquelle $(xy)^2 \leq 2$ c'est à dire $x^2 + y^2 \leq 2$. On ne trouve que la partie patatoïde.

D.1. Soit $M \in \mathcal{S}_2$ et λ_1, λ_2 ses valeurs propres. Les valeurs propres de ${}^tMM = M^2$ sont λ_1^2 et λ_2^2. M est dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $Tr({}^tMM) = 1 + (\det(M))^2$ ce qui s'écrit $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 + \lambda_1^2\lambda_2^2$ ou encore

$$(1-\lambda_2^2)(1-\lambda_1^2) = 0$$

Ceci a lieu si et seulement 1 ou -1 est valeur propre de M.

D.2. On a

$$M(x,y,z) - aI_2 = \underbrace{xM_1 + yM_2}_{\in E_2} + \underbrace{(z - a\sqrt{2})M_3}_{\in E_1}$$

Avec $III.B.1$ on a donc

$$\det(M(x,ynz)-a_2)=\det(xM_1+yM_2)+(z-a\sqrt{2})^2\det(M_3)=\frac{1}{2}\left(-x^2-y^2+(z-a\sqrt{2})^2\right)$$

On a donc

$$\mathcal{C}_a=\{M(x,y,z)/\ x^2+y^2=(z-a\sqrt{2})^2\}$$

Avec $D.1$ on a donc

$$\mathcal{H}\cap S_2=C_1\cup C_{-1}=\{M(x,y,z)/\ x^2+y^2=(z-\sqrt{2})^2 \ \text{ ou } \ x^2+y^2=(z+\sqrt{2})^2\}$$

D.3. On fait le calcul pour les M_i et on combine les résultats. On obtient

$$N=P(\theta)M(x,y,z)P(\theta)^{-1}=M(u,v,w) \ \text{ avec } \ \left\{\begin{array}{l} u=x\cos(2\theta)-y\sin(2\theta) \\ v=x\sin(2\theta)+y\cos(2\theta) \\ w=z \end{array}\right.$$

D.4. On obtient deux hyperboloïdes.