Centrale 2006 -PSI
première épreuve : corrigé

Partie I.

A.1. (F_0) est une équation linéaire d'ordre deux, à coefficients constants et homogène. Son équation caractéristique est $r^2+1=0$ et admet $\pm i$ comme solutions. L'ensemble des solutions de (F_0) est donc
$$Vect(\cos,\sin)$$

A.2. L'équation n'est plus homogène. On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant une solution particulière à l'ensemble des solution de F_0. Une recherche au brouillon d'une solution particulière (dont on prend ensuite la partie imaginaire) de $y''(x)+y(x)=e^{ix}$ sous la forme $x\mapsto axe^{ix}$ nous amène à vérifier que $x\mapsto\frac{x\sin(x)}{2}$ convient. L'ensemble cherché est donc
$$(x\mapsto\frac{x\sin(x)}{2})+Vect(\cos,\sin)$$

A.3. Comme $\sin(0)=0$, h est bien définie (les valeurs données en 0 et π sont les mêmes). On a
$$\forall x\in[0,2\pi],\ h(x)=\frac{\sin(x)+|\sin(x)|}{2}$$
et ceci reste vrai sur tout $\mathbb{R}$ (les deux fonctions sont 2π-périodiques). Cette expression montre, par théorèmes généraux, que
$$h\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$
On peut obtenir une solution particulière par méthode de variation des constantes, ce qui revient à faire le calcul de la question $I.C$ dans le cas particulier de la fonction h. Je ne pense pass que l'énoncé attende cela.
On peut aussi chercher une solution développable en série de Fourier (en utilisant le DSF de h). On obtiendra alors une solution particulière sous forme de somme de série trigonométrique. Il ne me semble pas que cela soit dans l'esprit de l'énoncé.
On peut enfin chercher la solution générale quand le second membre est $\sin(x)$, celle quand le second membre est nul puis obtenir une solution convenable sur $\mathbb{R}$ en faisant un bon recollement de solutions sur les intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$ (c'est à dire en faisant un bon choix des constantes).
Rien de tout cela ne me convient à ce niveau du problème.

B. La solution f de (F_0) telle que $f(0)=a$ et $f'(0)=b$ est définie par
$$f(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$$
Si $(a,b)=(0,0)$ alors f est nulle et vérifie $\|f\|_\infty\le\|(a,b)\|$. Sinon, il existe un t tel que $\cos(t)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(t)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et alors $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-t)$ nous donne encore $\|f\|_\infty\le\|(a,b)\|$.

C. Soit f_0 la fonction proposée. On a alors
$$\forall t,\ f_0(t)=\sin(t)\int_0^t h(u)\cos(u)\,du-\cos(t)\int_0^t h(u)\sin(u)\,du$$
Sous cette forme, on voit (avec le théorème fondamental) que f_0 est dérivable avec (deux termes s'éliminent)
$$\forall t,\ f_0'(t)=\cos(t)\int_0^t h(u)\cos(u)\,du+\sin(t)\int_0^t h(u)\sin(u)\,du$$

f_0' est à son tour dérivable et

$$\forall t,\ f_0''(t) = -\sin(t)\int_0^t h(u)\cos(u)\ du + \sin(t)\int_0^t h(u)\sin(u)\ du + (\cos^2(t)+\sin^2(t))h(t)$$

et on a donc

$$f_0'' + f_0 = h$$

L'ensemble des solutions de (F_h) est donc

$$f_0 + Vect(\cos, \sin)$$

D. Le calcul précédent indique que $f_0(0) = f_0'(0) = 0$ et f_0 est donc la solution cherchée. On a

$$\forall t \geq 0,\ |f_0(t)| \leq \int_{[0,t]} |h(u)||\sin(t-u)|\ du \leq \int_{[0,t]} |h(u)|\ du \leq \|h\|_1$$

f_0 est donc bornée et, en passant à la borne supérieure,

$$\|f_0\|_\infty \leq \|h\|_1 \leq \sqrt{2}\|h\|_1$$

Si $\|h\|_1 \leq \varepsilon$ alors $\|f_0\|_\infty \leq \varepsilon$ et (F_h) est donc stable par rapport au second membre au sens 1.

E. Les solutions sont (voir $A.2$) les fonctions

$$y_{a,b} : t \mapsto \frac{\delta t\sin(t)}{2} + a\cos(t) + b\sin(t)$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{y_{a,b}(2n\pi+\pi/2)}{2n\pi+\pi/2} = \frac{b+\delta(2n\pi+\pi/2)}{2n\pi+\pi/2} \underset{n\to+\infty}{\to} \delta$$

Le rapport $y_{a,b}(t)/t$ n'est donc pas de limite nulle en $+\infty$ et les solutions ne sont, en particulier, pas bornées sur $\mathbb{R}^+$ (non négligeable devant t au voisinage de l'infini).
Pour tout $\eta > 0$, il existe donc un choix de fonction h telle que $\|h\|_\infty \leq \eta$ (prendre $h(x) = \eta\cos(x)$) avec la solution de l'équation différentielle nulle et à dérivée nulle en 0 qui n'est pas bornée. A fortiori, on n'a pas stabilité par rapport au second membre au sens infini (la propriété qui devrait être vraie pour tout $\varepsilon > 0$ n'est vraie pour aucun).

Partie II.

A. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall \alpha > 1,\ t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t > 0,\ \alpha \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha} = \frac{1}{1+e^{\alpha\ln(t)}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- Pour tout $a > 1$, on a

$$\forall \alpha \geq a,\ \forall t \geq 0, \left|\frac{1}{1+t^\alpha}\right| \leq \left\{\begin{array}{ll} 1 \text{ si } & t \in [0,1] \\ \frac{1}{1+t^a} & \text{sinon} \end{array}\right. = \phi(t)$$

ϕ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^a$ au voisinage de l'infini. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $a > 1$).

Le théorème indique que $\alpha \mapsto I(\alpha)$ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

B.1. $\frac{g'}{g}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ et le théorème fondamental indique alors que cette fonction admet des primitives sur $\mathbb{R}^+$. $x \mapsto \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt$ en est une.
On a $(ge^{-A})' = g'e^{-A} - gA'e^{-A} = 0$ et, comme $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, la fonction ge^{-A} est constante sur $\mathbb{R}^+$.

B.2. En notant B et C les parties réelle et imaginaire d'une primitive A de g'/g, on obtient des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (A étant $\mathcal{C}^k$ comme primitive d'une fonction $\mathcal{C}^{k-1}$). En notant ce^{id} la constante de la question précédente (avec $c \geq 0$ et $d \in \mathbb{R}$), on a alors

$$\forall t \geq 0,\ g(t) = ce^{B(t)}e^{i(d+C(t))}$$

Les fonctions $r = ce^B$ et $\theta = e^{id+C}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. r est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et même $\mathbb{R}^{+*}$ car $c > 0$ (sinon ge^{-A} et donc g seraient nulles ce qui n'est pas le cas). Ces fonctions conviennent donc.

C.1. La fonction $g = f + if'$ est définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. Si (par l'absurde) g s'annule alors il existe t_0 tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz (utilisable ici car les coefficients de l'équation sont continus), il existe une une unique solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant ces conditions. La fonction nulle est cette solution et f est donc nulle, ce qui a été exclus.
g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}^*$. Les fonctions r et θ de la question précédente vérifient alors

$$f(t) + if'(t) = r(t)\cos(\theta(t)) + ir(t)\sin(\theta(t))$$

et, en identifiant parties réelle et imaginaire,

$$f = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad f' = r\sin(\theta)$$

On a bien sûr $r^2 = f^2 + (f')^2$ et donc (r est à valeurs positives) $r = \sqrt{f^2 + (f')^2}$.

C.2. En dérivant $f' = r\sin(\theta)$, on obtient une expression de f'' qui, incorporée dans l'équation différentielle donne

$$(*)\ :\ r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) = qr\sin(\theta) - r\cos(\theta)$$

Par ailleurs, en dérivant $f = r\cos(\theta)$, on obtient

$$(**)\ :\ r\sin(\theta) = -r\theta'\sin(\theta) + r'\cos(\theta)$$

En multipliant $(*)$ par $\cos(\theta)$ et $(**)$ par $\sin(\theta)$ puis en sommant, on obtient

$$r\theta' = qr\cos(\theta)\sin(\theta) - r$$

Comme r est une fonction qui ne s'annule pas, on peut diviser par r pour obtenir

$$\theta' = q\cos(\theta)\sin(\theta) - 1$$

C.3. On multiplie $(*)$ par $\sin(\theta)$ et $(**)$ par $\cos(\theta)$ et on somme. On obtient directement

$$r' = qr\sin^2(\theta)$$

C.4. Notons Q la primitive de q qui s'annule en 0 ($Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt$). La question précédente indique que

$$\forall t \geq 0,\ r'(t) \leq Q'(t)r(t)$$

En multipliant par $e^{-Q(t)} \geq 0$, on voit apparaître la dérivée de re^{-Q} et cette dérivée est négative. La fonction est donc décroissante et

$$\forall t \geq 0,\ r(t)e^{-Q(t)} \leq r(0)$$

Comme Q est croissante ($Q' = q \geq 0$), et admet pour limite $I(\alpha)$ en l'infini, on a donc

$$\forall t \geq 0,\ r(t) \leq r(0)e^{I(\alpha)}$$

Par ailleurs, r' est positve (question précédente et positivité de r et q). r est donc croissante. Etant majorée, elle admet une limite en l'infini (théorème de limite monotone) et

$$\lim_{+\infty} r \leq r(0)e^{I(\alpha)}$$

Ce qui précède montre que $\|r\|_\infty \leq r(0)e^{I(\alpha)}$. Notons en outre que

$$r(0)^2 = r(0)^2\cos^2(\theta(0)) + r(0)^2\sin^2(\theta(0)) = f(0)^2 + f'(0)^2 = \|(f(0), f'(0))\|^2$$

r est positif et majoré par $r(0)e^{I(\alpha)}$. $|\cos|$ et $|\sin|$ sont majorés par 1 et donc

$$\|f\|_\infty \leq r(0)e^{I(\alpha)} = \|(f(0), f'(0))\|e^{I(\alpha)}$$
$$\|f'\|_\infty \leq r(0)e^{I(\alpha)} = \|(f(0), f'(0))\|e^{I(\alpha)}$$

C.5. On a

$$\theta(t) + t = \theta(0) + \int_0^t (\theta' + 1) = \theta(0) + \int_0^t q\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$q\sin(\theta)\cos(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par q qui est intégrable. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et l'intégrale ci-dessus admet une limite (finie) quand $t \to +\infty$. On a ainsi existence d'une limite réelle en $+\infty$ pour $\theta(t) + t$.

C.6. Notons a la limite en l'infini de r et $-b$ celle de $\theta(t) + t$. On a alors, au voisinage de l'infini,

$$f(t) = (a + o(1))\cos(-t - b + o(1)) = a\cos(t + b + o(1)) + o(1)$$
$$f(t) = a\cos(t + b)\cos(o(1)) - a\sin(t + b)\sin(o(1)) + o(1)$$

Comme cos et : *sin* sont bornées et avec les développements usuels de cos et sin, on obtient

$$f(t) = a\cos(t + b) + o(1)$$

et ainsi

$$\lim_{t\to+\infty} (f(t) - a\cos(t + b)) = 0$$

C.7. Le graphe de f est asymptotiquement proche de celui de $t \mapsto a\cos(t + b)$ (sinusoïde dilatée ou contractée verticalement selon que $a > 1$ ou $a < 1$).

Partie III.

A. Soit $\varepsilon > 0$. Si on pose $\eta = \varepsilon e^{-I(\alpha)}$ alors la question $II.C.4$ montre que si f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et si $\|(f(0), f'(0))\| \leq \eta$ alors f est bornée et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

B.1. Un calcul simple donne

$$w' = f_1 f_2'' - f_2 f_1''$$

Comme $f_i'' = qf_i' - f_i$, on en déduit que

$$w' = qw$$

En notant, comme plus haut, Q la primitive de q qui s'annule en 0, on a $w = w(0)e^Q$. Comme Q est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a $\forall x \geq 0,\ Q(x) \in [Q(0) \lim_{+\infty} Q[= [0, I(\alpha)[$. Comme exp croît sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\forall x \geq 0,\ |w(0)| \leq |w(x)| \leq |w(0)|e^{I(\alpha)}$$

Les solutions f_1 et f_2 étant indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et $w(0) \neq 0$.

B.2. Soient C_1 et C_2 des primitives de $\frac{hf_2}{w}$ et $\frac{hf_1}{w}$. Soit $f = -C_1f_1 + C_2f_2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$f' = -C_1'f_1 - C_1f_1' + C_2'f_2 + C_2f_2' = -C_1f_1' + C_2f_2'$$

On voit que f' est dérivable avec

$$f'' = -C_1'f_1' - C_1f_1'' + C_2'f_2' + C_2f_2''$$

Comme $f_i'' = qf_i' - f_i$ et $C_i' = \frac{hf_{3-i}}{w}$ on a donc $f'' - qf + f = h$.
Toute fonction du type précédent est solution de $(E_{\alpha,h})$. De plus, l'ensemble des fonctions du type précédent est un espace affine dimension 2 (car les primitives sont définies à une constante près). Il en est de même de l'ensemble des solutions de $(E_{\alpha,h})$. Par dimension, ces deux ensembles sont égaux.

B.3. On a $f(0) = -C_1(0)f_1(0) + C_2(0)f_2(0)$ et $f'(0) = -C_1(0)f_1'(0) + C_2(0)f_2'(0)$. $(C_1(0), C_2(0))$ est solution d'un système linéaire dont le déterminant vaut $w(0) \neq 0$. Dans le cas où $f(0) = f'(0) = 0$, l'unique solution est $C_1(0) = C_2(0)$. La CNS cherchée est que C_1 et C_2 soient nulles en 0.

B.4. Soit $h \in L^1$ et f la solution de $(E_{\alpha,h})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On a alors $f = -C_1f_1 + C_2f_2$ avec C_1 et C_2 qui sont les primitives nulles en 0 de $\frac{hf_2}{w}$ et $\frac{hf_1}{w}$. Ainsi

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = \int_0^x \left(\frac{h(t)}{w(t)}(f_1(t)f_2(x) - f_2(t)f_1(x)) \right) dt$$

D'après la partie II, f_1 et f_2 sont bornées. D'après $III.B.1$, $|w(x)| \geq a > 0$. On a donc

$$\forall x \geq 0,\ |f(x)| \leq \frac{2\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty}{a} \int_0^x |h(t)|\, dt \leq C\|h\|_1 \ \text{ avec } C = \frac{2\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty}{a}$$

On a ainsi $\|f\|_\infty \leq C\|h\|_1$.
On en déduit la stabilité de $(E_{\alpha,0})$ par rapport au second membre au sens 1 (pour un $\varepsilon > 0$ donné, $\eta = \varepsilon/C$ convient).

C.1. Un calcul immédiat donne

$$\Phi'' - q\Phi' + \Phi = h \ \text{ avec } \ h = qg'$$

D'après la partie I, il existe des constantes a et b telles que

$$\forall t,\ g(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \frac{\lambda t \sin(t)}{2}$$

On en déduit (calcul immédiat) que $g'(t) = O(t)$ au voisinage de l'infini. Comme $\alpha > 1$, on a alors $h(t) = q(t)g'(t) = O(t^{1-\alpha})$ qui est de limite nulle en $+\infty$.

C.2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c > 0$ tel que $\forall t \geq c,\ |h(t)| \leq \varepsilon/2$. On a alors (on découpe l'intégrale)

$$\forall t \geq c,\ \frac{1}{t}\int_0^t |h| \leq \frac{1}{t}\int_0^c |h| + \frac{t-c}{t}\frac{\varepsilon}{2}$$

Le premier terme du membre de droite est de limite en l'infini et est donc inféreieur à $\varepsilon/2$ pour t assez grand $t \geq d$). Le second est plus petit que $\varepsilon/2$. On a ainsi

$$\forall t \geq d,\ \frac{1}{t}\int_0^t |h| \leq \varepsilon$$

On a ainsi montré que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |h| = 0$$

ce qui correspond à la négligeabilité demandée.

C.3. On a vu en question $III.B.4$ que

$$\forall t \geq 0,\ |\Phi(t)| \leq C \int_0^t |h| \ \text{ avec } C = \frac{2\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty}{a}$$

Le majorant étant négligeable devant t au voisinage de l'infini, il en est de même pour Φ.

C.4. D'après la question $I.E$, la fonction g n'est pas négligeable devant $o(t)$ au voisinage de l'infini. Comme $\Phi = f - g$ l'est, f ne peut alors pas l'être. On conclut alors comme en $I.E$ la non stabilité de $(E_{\alpha,0})$ par rapport au second membre au sens ∞.

D.1. Notons $q_u(t)\frac{1}{1+t^u}$. On a $f'' - q_\alpha f' + f = 0$ et $g'' - q_\beta g' + g = 0$. En faisant la différence de ces deux relations, on obtient

$$\Phi'' - q_\alpha \Phi' + \Phi = h \ \text{ avec } \ h = (q_\alpha - q_\beta)g'$$

D.2. D'après la partie II, $\|g'\|_\infty \leq \|(a,b)\| \exp(I(\beta))$. Par ailleurs $q_\alpha - q_\beta$ est de signe constant sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty]$ (on utilisera ceci sous la forme $\int_a^b |u| = \left|\int_a^b u\right|$ quand u est de signe constant sur $[a,b]$). On a donc

$$\int_0^{+\infty} |h| \leq \|(a,b)\| \exp(I(\beta)) \int_0^\infty |q_\alpha - q_\beta| = \|(a,b)\| \exp(I(\beta)) \left(\left|\int_0^1 (q_\alpha - q_\beta)\right| + \left|\int_1^\infty (q_\alpha - q_\beta)\right| \right)$$

Avec les notations de l'énoncé, on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} |h| \leq \|(a,b)\| \exp(I(\beta)) \left(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|\right)$$

D.3. $|J(\alpha) - J(\beta)|$ et $|K(\alpha) - K(\beta)|$ sont arbitrairement petit pour $|\alpha - \beta|$ suffisamment petit (α fixé). Il en est donc de même pour $\|h\|_1$ (avec ce qui précède ; le $I(\beta)$ ne gêne pas car β varie dans un segment autour de α et I est continue donc bornée sur ce segment). Avec la question $III.B.4$ on a $\|\Phi\|_\infty \leq C\|h\|_1$. Ainsi, $\|\Phi\|_\infty$ est arbitrairement petit pour $|\alpha - \beta|$ suffisamment petit. On a alors stabilité de $(E_{\alpha,0})$ par rapport au paramètre.

Partie IV.

A. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de telles fonctions et on a

$$\forall t \geq 0,\ f(t) = \sqrt{t+1}g(t),\ f'(t) = \sqrt{t+1}g'(t) + \frac{g(t)}{2\sqrt{t+1}},\ f''(t) = \sqrt{t+1}g''(t) + \frac{g'(t)}{\sqrt{t+1}} - \frac{g(t)}{4(t+1)^{3/2}}$$

En injectant ceci dans $(E_{1,0})$ et en divisant par $\sqrt{t+1}$ on obtient

$$\forall t \geq 0,\ g''(t) + \left(1 - \frac{3}{4(t+1)^2}\right) g(t) = 0$$

B. Si $g(t) = g'(t) = 0$ alors les formules précédentes donnent $f(t) = f'(t) = 0$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz, ceci donnerait f nulle ce qui est exclus. Ainsi, la fonction $t \mapsto g(t) + ig'(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (g l'est car f l'est et ce dernier point s'obtient par récurrence avec l'équation différentielle vérifiée par f). On peut lui appliquer $II.B$. On obtient des fonctions $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ et $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que

$$g = \rho\cos(\beta) \ \text{ et } \ g' = \rho\sin(\beta)$$

C. On procède comme en II.C pour obtenir (après calcul au brouillon)

$$\forall t \geq 0,\ \beta'(t) + 1 = \frac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2}$$

On en déduit que

$$\forall x \geq 0,\ \beta(x) + x = \beta(0) + \int_0^x \frac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2}\ , dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{3\cos^2(\beta(t))}{4(1+t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/t^2$ en l'infini. C'est donc une fonction intégrable. L'intégrale ci-dessus admet donc une limite réelle quand $x \to +\infty$ et il en est ainsi de même pour $\beta(x) + x$.

D. On obtient de même

$$\forall t \geq 0,\ \rho'(t) = \frac{3\cos(\beta(t))\sin(\beta(t))}{4(1+t^2)}\rho(t) = u(t)\rho(t)$$

On en déduit, en notant U la primitive de u nulle en 0, que

$$\forall x \geq 0,\ \rho(x) = \rho(0)e^{U(x)}$$

Or, $U(x) = \int_0^x u(t)\ dt$ et u est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/t^2$ en l'infini). U admet donc une limite réelle α et $\rho(x) \to \rho(0)e^{\alpha} = a \neq 0$ quand $x \to +\infty$.

E. Comme en II.C.6 on a donc l'existence d'une constante b telle que

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) - a\cos(t+b) = 0$$

On a donc

$$\frac{f(t)}{\sqrt{t+1}} = a\cos(t+b) + o(1)$$

Comme $\sqrt{t+1} \sim \sqrt{t}$, on a $o(\sqrt{t+1}) = o(\sqrt{t})$ et $\sqrt{t+1} = \sqrt{t} + o(\sqrt{t})$. Ce qui précède donne donc

$$f(t) = a(\sqrt{t} + o(\sqrt{t}))\cos(t+b) + o(\sqrt{b})$$

Enfin, cos est bornée et donc $o(\sqrt{t})\cos(t+b) = o(\sqrt{t})$ ce qui permet de conclure que

$$f(t) = a\sqrt{t}\cos(t+b) + o(\sqrt{t})$$

F. Au voisinage de l'infini, $a\sqrt{t}\cos(t+b)$ est un équivalent de $f(t)$ et on a donc l'allure du graphe de f (même si les deux courbes peuvent s'éloigner infiniment) : on oscille entre les branches d'une parabole "horizontale".

Partie V.

A. f étant une solution non nulle de $(E_{1,0})$ n'est pas bornée au voisinage de l'infini (question *IV.E*). Il n'y a donc pas stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport aux conditions initiales.
Soit $(a,b) \neq (0,0)$. La solution f de $(E_{\alpha,0})$ telle que $f(0) = a$ et $f'(0) = b$ est bornée pour tout $\alpha > 1$. La solution g de $(E_{1,0})$ telle que $f(0) = a$ et $f'(0) = b$ est non bornée. La différence est donc non bornée et il n'y a pas stabilité par rapport au paramètre de $(E_{1,0})$.

B. On a

$$\forall x \geq 0,\ f''_\lambda(x) - \frac{f'_\lambda(x)}{1+x} + f_\lambda(x) = \lambda\frac{2\cos(x) - \sin(x) + x\cos(x)}{1+x}$$

Soit h_λ la fonction ci-dessus. $h_\lambda \in B$ et $\|h_\lambda\|_\infty$ est arbitrairement petite pour λ assez proche de 0. Cependant, f_λ est solution de (E_{1,h_λ}), est nulle à dérivée nulle en 0 et n'est pas bornée. Il n'y a donc pas stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens de ∞.