Partie I.

I.A. La fonction exponentielle est DSe sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Il en est donc de même de e^{x^2} (composition) et de $(1+x^2)e^{x^2}$ (produit de fonctions DSE sur $\mathbb{R}$) et on a (c'est un produit de Cauchy élémentaire)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)e^{x^2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!}\right) x^{2k} = \sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{k!} x^{2k}$$

I.B1. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus. L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc un espace affine de dimension 1 dirigé par l'espace des solutions de l'équation homogène. Comme $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$, la fonction $y_0 : x \mapsto e^{x^2/2}$ est solution de l'équation homogène. Par ailleurs, pour que cy_0 soit solution de (E), il suffit que

$$\forall x,\ c'(x)y_0(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$$

$c(x) = x + x^3/3$ convient et la solution générale de (E) est donc

$$x \mapsto \left(a + x + \frac{x^3}{3}\right) e^{x^2/2}$$

où a est une constante réelle.

I.B2. $f(0) = 1$ impose la valeur $a = 1$ et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(1 + x + \frac{x^3}{3}\right) e^{x^2/2} = P(x)e^{-x^2/2}$$

$P'(x) = x^2 + 1$ est positif strictement. P est donc strictement croissante. Etant continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (limites infinies en l'infini) et admet une unique racine α qui est l'unique zéro de f.

I.B3. On a

$$P\left(-\frac{8}{10}\right) = \frac{11}{375} \text{ et } P\left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{143}{1000}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires (P est continue) indique alors que

$$\alpha \in \left[-\frac{9}{10}, -\frac{8}{10}\right]$$

Le principe de la méthode de Newton est de partir d'une première valeur approchée u_0 de α, d'assimiler le graphe de f à sa tangente en $(u_0, f(u_0))$. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point u_1 que l'on prend comme nouvelle approximation. On voit aisément (en posant l'équation de la tangente) que

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$$

Ici, on applique la méthode de Newton en partant de $u_0 = \alpha_0$ pour obtenir u_1 puis u_2 etc. u_n est notre candidat pour la valeur approchée. On aura $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$ si $f(u_n) > 0$ et $f(u_n - 10^{-6}) < 0$ (théorème des valeurs intermédiaires). Il en est de même si $f(u_n) < 0$ et $f(u_n + 10^{-6}) > 0$.
En pratique, on gère un test qui nous indique quand on peut sortir de la boucle.

```
f:=x->(1+x+x^3/3)*exp(x^2/2);
fprime:=D(f);
a:=-0.9:test:=true:
while test do
 a:=a-(f(a)/fprime(a));
 if (f(a)<0 and f(a+10^(-6))>0) or
         (f(a)>0 and f(a-10^(-6))<0) then test:=false fi
 od:
```

On obtient

$$-0.817732 \leq \alpha \leq -0.817731$$

Partie II.

II.A1. L'intégration est immédiate

$$I_1(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} t \, dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - e^{-x^2/2}$$

II.A2. Une intégration par parties donne (en primitivant $te^{-t^2/2}$) pour $p \geq 2$,

$$I_p(x) = \left[-e^{-t^2/2} t^{p-1}\right]_0^x + (p-1)I_{p-2}(x) = -x^{p-1}e^{-x^2/2} + (p-1)I_{p-2}(x)$$

II.B. Montrons par récurrence l'existence de $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $A_k \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-x^2/2} A_k(x)$$

- Pour $k = 0$, $\lambda_0 = 1$ et $A_0(x) = -1$ conviennent.
- Supposons le résultat vrai au rang $k \geq 0$. On a alors

  $$I_{2k+3}(x) = -x^{2k+2}e^{-x^2/2} + (2k+2)I_{2k+1}(x) = (2k+2)\lambda_k + \left((2k+2)A_k(x) - x^{2k+2}\right) e^{-x^2/2}$$

  ce qui donne la relation voulue avec

  $$\lambda_{k+1} = 2(k+1)\lambda_k \quad \text{et} \quad A_{k+1}(x) = 2(k+1)A_k(x) - x^{2k+2}$$

  qui sont bien respectivement un réel et un polynôme.

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda_k = 2^k k!$$

Montrons aussi par récurrence que

$$A_k(x) = -\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} 2^{k-i} x^{2i}$$

- C'est vrai pour $k = 0$ ($A_0(x) = -1$).
- Supposons le résultat vrai au rang k. On a alors

  $$A_{k+1}(x) = -2(k+1)\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} 2^{k-i} x^{2i} - x^{2k+2} = -\sum_{i=0}^{k} \frac{(k+1)!}{i!} 2^{k+1-i} x^{2i} - x^{2k+2}$$

  ce qui donne le résultat au rang $k+1$.

II.C. Montrons par récurrence l'existence de $\mu_k \in \mathbb{R}$ et $B_k \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-x^2/2} B_k(x)$$

- Pour $k = 0$, $\mu_0 = 1$ et $B_0(x) = 0$ conviennent.
- Supposons le résultat vrai au rang $k \geq 0$. On a alors

$$I_{2k+2}(x) = -x^{2k+1}e^{-x^2/2} + (2k+1)I_{2k}(x) = (2k+1)\mu_k I_0(x) + \Big((2k+1)B_k(x) - x^{2k+1}\Big)e^{-x^2/2}$$

ce qui donne la relation voulue avec

$$\mu_{k+1} = (2k+1)\mu_k \ \text{ et } \ B_{k+1}(x) = (2k+1)B_k(x) - x^{2k+1}$$

qui sont bien respectivement un réel et un polynôme.

Montrons par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mu_k = \frac{(2k)!}{2^k k!} \ \text{ et } \ deg(B_k) = 2k - 1$$

- On $\mu_1 = \mu_0 = 1$ et $B_1(x) = B_0(x) - x = -x$. Le résultat est donc vrai au rang 1.
- Supposons le résultat vrai au rang k. On a alors directement $deg(B_{k+1}) = 2k + 1$ avec la relation de récurrence. En outre

$$\mu_{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)}\mu_k = \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}$$

ce qui donne la relation au rang $k + 1$.

On sait aussi que $\mu_0 = 1$ (formule précédente encore valable) et $B_0 = 0$ (degré non défini).

II.D1. Si $deg(P) = n$ alors $deg(XP) = n + 1 > deg(P' + 1)$. On a donc

$$deg(1 + P' - XP) = n + 1$$

II.D2. $g : t \mapsto e^{-t^2/2}$ étant continue, le théorème fondamental indique que I_0 est une primitive de g. Soit $h : x \mapsto I_0(x) + P(x)e^{-x^2/2}$ où P est un polynôme. Cette fonction est dérivable et

$$h'(x) = e^{-x^2/2}\left(1 + P'(x) - xP(x)\right)$$

Si h est constante alors $1 + P' - xP = 0$. Si $P = 0$, ceci n'a pas lieu. Si $P \neq 0$, la question précédente apporte aussi une contradiction en étudiant le degré. On ne peut donc choisir $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que h soit constante.

Partie III.

III.A1. Par linéarité de la dérivation (entre autres) on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(f + kg)(x) = f'(x) + kg'(x) - xf(x) - kxg(x) = \phi(f)(x) + k\phi(g)(x)$$

c'est à dire $\phi(f + kg) = \phi(f) + k\phi(g)$. ϕ est donc linéaire.

III.A2. Le noyau de f est l'ensemble des solution de l'équation homogène asssociée à (E); La première partie indique donc que

$$Ker(\phi) = Vect(x \mapsto e^{x^2/2})$$

III.A3. ϕ n'est pas injective puisque son noyau n'est pas restreint à $\{0\}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire, indique que pour tout choix d'un second membre continu (E) possède une solution. Si le second membre est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il en est de même pour toute solution (récurrence immédiate). ϕ est donc surjective de E dans E.

III.A4. Soit $g \in E$. Soit $y_0 : x \mapsto e^{x^2/2}$. Pour que cy_0 soit solution de $y' - xy = g$, il suffit (méthode de variation de la constante) que

$$\forall x,\ c'(x)y_0(x) = g(x)$$

Il suffit donc de choisir

$$c(x) = \int_0^x g(t)e^{-t^2/2}\ dt$$

On a alors l'ensemble des solutions de $y' - xy = g$ c'est à dire $\phi^{-1}(g)$ (puisque toutes les solutions sont dans E).

$$\phi^{-1}(g) = \left\{ x \mapsto e^{x^2/2} \left(a + \int_0^x g(t)e^{-t^2/2}\ dt \right) /\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

III.B1. On a

$$\forall x,\ \phi \circ \phi(f)(x) = \phi(f)'(x) - x\phi(f)(x) = f''(x) - 2xf'(x) + (x^2 - 1)f(x)$$

III.B2. L'équation proposée est homogène, linéaire du second ordre à coefficients continus. L'ensemble de ses solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2. f en est une solution si et seulement si $\phi(f)$ est dans le noyau de ϕ c'est à dire est du type $x \mapsto ae^{x^2/2}$.
On montre comme en début de problème que la solution générale de $y' - xy = e^{x^2/2}$ est $x \mapsto xe^{x^2/2} + ce^{x^2/2}$. On en déduit que la solution générale de l'équation du seond ordre proposée est

$$x \mapsto (a + bx)e^{x^2/2}$$

On peut aussi faire le calcul au brouillon et se contenter de vérifier que $x \mapsto e^{x^2/2}$ et $x \mapsto xe^{x^2/2}$ sont deux solutions indépendantes. Elles engendrent alors l'espace des solutions.

III.C1. On vient de résoudre $\phi^2(f) = 0$ à la question précédente.

III.C2. Montrons par récurrence que

$$Ker(\phi_n) = \{x \mapsto P(x)e^{x^2/2} /\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$$

- Le résultat a été prouvé pour $n = 1$ et $n = 2$.
- Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 2$. On a $\phi^{n+1}(f) = 0$ si et seulement si $\phi(f) \in Ker(\phi^n)$. D'après l'hypothèse de récurrence ceci aura lieu si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

  $$\forall x \in \mathbb{R} /\ f'(x) - xf(x) = P(x)e^{x^2/2}$$

  La question $III.A4$. indique que ceci équivaut à l'existence d'un constante a telle que

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2/2} \left(a + \int_0^x P(t)\ dt \right)$$

  Quand P varie dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $x \mapsto \int_0^x P(t)\ dt$ varie dans $Vect(X, \dots, X^n)$. On a donc montré que

  $$ker(\phi^{n+1}) = \{x \mapsto Q(x)e^{x^2/2} /\ Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$$

Partie IV.

IV.A. Si $P \neq 0$ alors $deg(XP) = deg(P) + 1 > deg(P')$ et $P' - XP$ est de degré égal à $1 + deg(P)$ et est non nul. On a donc $Ker(\phi_0) = \{0\}$ et ϕ_0 est injective.
Soit $f \in \phi^{-1}(1)$. La question $III.A4$. indique l'existence d'une constante a telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2/2}\,(a + I_0(x))$$

On a alors $e^{-x^2/}f(x) - I_0(x) = a$ ce qui est impossible avec la question $II.D2$. quand f est un polynôme. Ainsi, 1 n'admet pas d'antécédent par ϕ_0 et ϕ_0 n'est pas surjective de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

IV.B. D'après la question $III.A4$, La fonction $f \in E$ vérifie $\phi(f) = X^{2n+1}$ si et seulement si il existe une constante a telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2/2}\,(a + I_{2n+1}(x))$$

Cette condition équivaut à

$$I_{2n+1}(x) = e^{-x^2/2}f(x) - a$$

Pour $f(x) = A_k(x)$, une telle constante a existe ($-\lambda_k$ convient). On a donc $\phi(A_k) = X^{2n+1}$ et ainsi

$$X^{2n+1} \in Ker(\phi_0)$$

Par linéarité de ϕ_0, toute combinaison linéaire des X^{2n+1} est dans $Im(\phi_0)$. Ce sous-espace contient donc tous les polynômes ne possédant que des puissances impaires c'est à dire le sous-espace des polynômes impairs.

IV.C1. Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\phi(f) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}$ si et seulement si il existe une constante a telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2q}(x) - (2q-1)I_{2q-2}(x) = f(x)e^{-x^2/2} - a$$

On en déduit avec la partie II que

$$\phi_0(-X^{2q-1}) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}$$

(la constante $a = 0$ convient alors).

IV.C2. Comme le fait remarquer l'énoncé (et comme $\mu_k = (2k-1)\mu_{k-1}$), on a

$$\frac{Q_k(x)}{\mu_k} = \frac{X^{2k}}{\mu_k} - (2k-1)\frac{X^{2k-2}}{\mu_k} = \frac{X^{2k-1}}{\mu_{k-1}}$$

Sommons ces inégailtés de $k = 1$ à $k = q$. Un telescopage s'opère et on obtient

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{Q_k(x)}{\mu_k} = \frac{X^{2q}}{\mu_q} - \frac{1}{\mu_0}$$

On en déduit que

$$X^{2q} - \mu_q = \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_q}{\mu_k} Q_k \in \mathcal{P}$$

IV.C3. On sait que $Vect(X^{2k})$ et $Vect(X^{2k+1})$ sont en somme directe (car (X^k) est libre). Comme $\mathcal{P} \subset Vect(X^{2k})$, on en déduit, a fortiori, que $\mathcal{P}$ et $Vect(X, X^3, \dots)$ sont en somme directe.

IV.C4. D'après les questions $B2$ et $C1$, les deux sous espaces $\mathcal{P}$ et $Vect(X, X^3, \dots)$ sont inclus dans $Im(\phi_0)$. On a donc, avec la question précédente,

$$\mathcal{P} \oplus Vect(X, X^3, \dots) \subset Im(\phi_0)$$

Comme $(1, X, X^2, \dots)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, on a

$$Im(\phi_0) = Vect(\phi(X^n))_{n\in\mathbb{N}} = Vect(\phi(X^{2n}))_{n\in\mathbb{N}} + Vect(\phi(X^{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$$

Le second sous-espace est $\mathcal{P}$ par définition ($\phi(X^{2q-1}) = Q_q$). Le premier est constitué de polynômes impairs (car $\phi(X^{2n})$ l'est pour tout n). On a donc

$$Im(\phi_0) \subset \mathcal{P} \oplus Vect(X, X^3, \dots)$$

ce qui donne finalement l'égalité demandée.

Partie V.

V.A. On utilise à nouveau $III.A4$ pour obtenir l solution générale de (1) qui est

$$x \mapsto e^{x^2/2}\left(a + \int_0^x (1+t^2)e^{t^2}e^{-t^2/2}\,dt\right) = e^{x^2/2}\,(a + H(x))$$

V.B. Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ solution de (1). On peut dériver et sommer terme les séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence et on a donc

$$\forall x \in]-R, R[,\ y'(x) - xy(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}((2n+1)a_n - a_{n-1})x^{2n}$$

Avec la question $I.A$ et par unicité du DSE (comme $R > 0$ on en déduit que

$$a_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n+1)a_n - a_{n-1} = \frac{n+1}{n!}$$

Une récurrence simple montre alors que

$$\forall n,\ a_n = \frac{1}{n!}$$

On en déduit alors que

$$\forall x \in]-R, R[,\ y(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!} = xe^{x^2}$$

Réciproquement (et le reste aurait pu être fait au brouillon) on vérifie que $x \mapsto xe^{x^2}$ est solution impaire de (1). Cette solution est DSE de rayon infini comme $x \mapsto e^x$.

V.C. Il existe donc a tel que

$$\forall x,\ e^{x^2/2}(a + H(x)) = xe^{x^2}$$

La valeur en $x = 0$ donne $a = 0$ et donc

$$\forall x,\ H(x) = xe^{x^2/2}$$