CENTRALE-SUPÉLEC PSI 2004
MATHÉMATIQUES II

Partie I : Étude de trajectoires

I.A. Dans F, le problème de Cauchy $\mathcal{P}(f_F, x_0)$: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = f_F(x) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$ admet une solution unique $x : \mathbb{R} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Cette solution vérifie aussi le problème de Cauchy $\mathcal{P}(f, x_0)$, c'est donc la f-trajectoire de x_0, et elle est contenue dans F.

I.B. La droite vectorielle $F = \mathbb{R}x_0$ est stable par f ; la f-trajectoire de x_0 est donc contenue dans F, on peut écrire $x(t) = \alpha(t)\, x_0$, où $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Les conditions $\mathcal{P}(f, x_0)$ donnent alors $\alpha(0) = 1$ et, par linéarité de f,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\, x_0 = f(x) = f\big(\alpha(t)\, x_0\big) = \alpha(t)\, \lambda\, x_0 \ ,$$

d'où $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \lambda\alpha(t)$. La fonction scalaire α est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \alpha' & = \lambda\alpha \\ \alpha(0) & = 1 \end{cases}$, donc $x(t) = e^{\lambda t}\, x_0$.

I.C. Le plan $F = \mathrm{Vect}\big(x_0, f(x_0)\big)$ est stable par f, et la famille $\big(x_0, f(x_0)\big)$ en est une base. D'après **I.A.**, on peut écrire $x(t) = \alpha(t)\, x_0 + \beta(t)\, f(x_0)$ avec α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La condition initiale $x(0) = x_0$ donne $\alpha(0) = 1$ et $\beta(0) = 0$, tandis que

$$x'(t) = \alpha'(t)\, x_0 + \beta'(t)\, f(x_0) = f\big(\alpha(t)\, x_0 + \beta(t)\, f(x_0)\big) = \alpha(t)\, f(x_0) \ ,$$

d'où $\alpha'(t) = 0$ et $\beta'(t) = \alpha(t)$.
On en tire $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = t$, donc $x(t) = x_0 + t\, f(x_0)$: la f-trajectoire de x_0 est la droite affine passant par x_0 et de vecteur directeur $f(x_0)$, soit $\mathcal{D} = x_0 + \mathbb{R}\, f(x_0)$.

I.D.1) Si la famille $\big(x_0, f(x_0)\big)$ était liée, on aurait $f(x_0) = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, puis $f^2(x_0) = \lambda^2 x_0$ et enfin $(\lambda^2 - 2k\lambda\, \cos\varphi + k^2)\, x_0 = 0$, d'où $(\lambda - k\, \cos\varphi)^2 + k^2\, \sin^2\varphi = 0$, ce qui entraîne notamment $k\, \sin\varphi = 0$, absurde.
Par ailleurs, le plan $F = \mathrm{Vect}\big(x_0, f(x_0)\big)$ est stable par f, d'où $x(t) = u(t)\, x_0 + v(t)\, f(x_0)$ avec u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (*et non dans E*) de classe $\mathcal{C}^1$ comme en **I.C.**

I.D.2) L'équation $x' = f(x)$ donne

$$x'(t) = u'(t)\, x_0 + v'(t)\, f(x_0) = u(t)\, f(x_0) + v(t)\, \big[(2k\, \cos\varphi)\, f(x_0) - k^2\, x_0\big] \ ,$$

donc u et v sont solutions du système différentiel $\begin{cases} u' & = -k^2\, v \\ v' & = u + (2k\, \cos\varphi)\, v \end{cases}$. Il en résulte que u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$u'' - (2k\, \cos\varphi)\, u' + k^2\, u = 0 \ . \qquad \textbf{(*)}$$

Comme en **I.C.**, on a les conditions initiales $\begin{cases} u(0) & = 1 \\ v(0) & = 0 \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} u(0) & = 1 \\ u'(0) & = 0 \end{cases}$. L'équation caractéristique de **(*)** a deux racines distinctes, complexes conjuguées $ke^{i\varphi}$ et $ke^{-i\varphi}$, donc les solutions réelles de **(*)** sont de la forme

$$u(t) = e^{kt\, \cos\varphi}\, \Big(A\, \cos(kt\, \sin\varphi) + B\, \sin(kt\, \sin\varphi)\Big) \ ,$$

avec A et B réels. Les conditions initiales imposent, après quelques calculs, $A = 1$ et $B = -\operatorname{cotan}\varphi$. On obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad u(t) = \frac{e^{kt\, \cos\varphi}}{\sin\varphi}\, \sin(\varphi - kt\, \sin\varphi) \ .$$

Ce n'est pas demandé, mais on a aussi $v(t) = \dfrac{e^{kt\ \cos\varphi}}{k\ \sin\varphi}\ \sin(kt\ \sin\varphi)$.

I.D.3) Les expresssions obtenues ci-dessus montrent clairement que
- si $\cos\varphi > 0$, alors les fonctions u et v ne sont pas bornées au voisinage de $+\infty$;
- si $\cos\varphi < 0$, alors les fonctions u et v ne sont pas bornées au voisinage de $-\infty$;
- si $\cos\varphi = 0$, alors les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Si cette dernière condition est réalisée, on a alors, en posant $\sin\varphi = \varepsilon = \pm 1$,

$$u(t) = \varepsilon\ \sin(\varphi - k\varepsilon\, t) = \cos kt \qquad ; \qquad v(t) = \frac{1}{k}\ \sin kt\ .$$

La f-trajectoire x est alors une ellipse de centre O. *Notons que, le repère* $\big(O\ ;\ x_0, f(x_0)\big)$ *n'étant pas a priori orthonormal, il n'est pas simple de préciser les axes.*

Le centre de l'ellipse étant O, il s'agira d'un cercle si et seulement si $\|x(t)\|$ est constant. Or,

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^2 &= \|u(t)\,x_0 + v(t)\,f(x_0)\|^2\\ &= (\cos^2 kt)\,\|x_0\|^2 + \frac{1}{k}\,(\sin 2kt)\,\big(x_0|f(x_0)\big) + \frac{1}{k^2}\,(\sin^2 kt)\,\|f(x_0)\|^2\ ,\end{aligned}$$

donc (*encore un peu de calcul*) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|x(t)\|^2\big) = 2\ \cos(2kt)\ \big(x_0|f(x_0)\big) + \frac{1}{k}\ \sin(2kt)\ \big(\|f(x_0)\|^2 - k^2\|x_0\|^2\big)\ .$$

On voit donc que la trajectoire est un cercle si et seulement si on a les deux conditions $\begin{cases}\big(x_0|f(x_0)\big) = 0\\ \|f(x_0)\| = k\,\|x_0\|\end{cases}$.

I.E.1) $f(x_0) \in G \subset F = \mathrm{Vect}(G)$; $f^2(x_0) = g(x_0) - k^2 x_0 \in F$; f et g commutent car g est un polynôme en f donc $fg(x_0) = gf(x_0) \in G \subset F$; enfin, $fgf(x_0) = gf^2(x_0) = g^2(x_0) - k^2 g(x_0) = -k^2\, g(x_0) \in F$. Les quatre éléments de G ont une image par f appartenant à $\mathrm{Vect}(G)$, donc $F = \mathrm{Vect}(G)$ est stable par f.

I.E.2) Si $g(x_0) = 0$, la famille G est évidemment liée.

Si $g(x_0) \neq 0$, alors montrons d'abord que la sous-famille $G' = \big(g(x_0), gf(x_0)\big)$ est libre : en effet, si elle était liée, on aurait $gf(x_0) = \lambda\, g(x_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, puis $fgf(x_0) = \lambda\, fg(x_0)$ soit (*cf.* question précédente) $-k^2 g(x_0) = \lambda fg(x_0) = \lambda gf(x_0) = \lambda^2 g(x_0)$ et enfin $\lambda^2 = -k^2 < 0$, absurde. Montrons alors que G est libre : supposons $a\,x_0 + b\,f(x_0) + c\,g(x_0) + d\,gf(x_0) = 0$ avec a, b, c, d réels ; en appliquant g, puisque $g^2 f(x_0) = fg^2(x_0) = 0$, on trouve $a\ g(x_0) + b\ gf(x_0) = 0$, donc a et b sont nuls puisque la famille G' est libre ; il reste $c\,g(x_0) + d\,gf(x_0) = 0$ donc c et d sont nuls.

I.E.3) F étant stable par f, la f-trajectoire de x_0 est contenue dans F, d'où l'existence de quatre fonctions u, v, w, h de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = u(t)\,x_0 + v(t)\,f(x_0) + w(t)\,g(x_0) + h(t)\,gf(x_0)\ .$$

L'équation $x' = f(x)$ donne

$$\begin{aligned}x'(t) &= u'(t)\,x_0 + v'(t)\,f(x_0) + w'(t)\,g(x_0) + h'(t)\,gf(x_0)\\ &= u(t)\,f(x_0) + v(t)\,\big(g(x_0) - k^2\,x_0\big) + w(t)\,gf(x_0) - k^2\,h(t)\,g(x_0)\ .\end{aligned}$$

En identifiant les coordonnées dans la base G de F, on obtient le système différentiel **(S)** :
$\begin{cases} u' &= -k^2\, v \\ v' &= u \\ w' &= v - k^2\, h \\ h' &= w \end{cases}$. On a par ailleurs les conditions initiales

$$\{u(0) = 1 \ ,\ v(0) = 0 \ ,\ w(0) = 0 \ ,\ h(0) = 0\} \ .$$

Les deux premières équations de **(S)** donnent immédiatement $u'' = -k^2\, u$, puis avec les conditions initiales : $u(t) = \cos kt$; $v(t) = \dfrac{1}{k}\ \sin kt$.

Des deux dernières équations de **(S)**, on tire que w et h sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que $w''(t) + k^2\, w(t) = \cos kt$, ce qui se résout en $w(t) = C\ \cos kt + D\ \sin kt + \dfrac{t}{2k}\ \sin kt$. De $w(0) = 0$, on tire $C = 0$. Ensuite $h = \dfrac{1}{k^2}(v - w')$ et $h(0) = 0$ entraîne $D = 0$ (*je laisse les détails de calcul à l'improbable lecteur... ou à MAPLE*), on obtient finalement

$$w(t) = \frac{t}{2k}\ \sin kt \qquad ; \qquad h(t) = \frac{1}{2k^3}\ \sin kt - \frac{t}{2k^2}\ \cos kt \ .$$

Effectivement, les fonctions w et h ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Étude des endomorphismes à trajectoires bornées

II.A. Cela résulte de la question **I.B.** Si x_0 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, la f-trajectoire de x_0 est définie par $x(t) = e^{\lambda t}\, x_0$, fonction bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda = 0$.

II.B. S'il existe un élément dans $\mathrm{Ker}\, f^2 \setminus \mathrm{Ker}\, f$, sa f-trajectoire x n'est pas bornée puisque son image $x(\mathbb{R})$ est une droite affine, *cf.* question **I.C.** Donc $\mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$ et l'autre inclusion est immédiate.
Il suffit alors de montrer que $\mathrm{Im}\, f \ \cap\ \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ (considérer les dimensions) ; or, si $x \in \mathrm{Im}\, f \ \cap\ \mathrm{Ker}\, f$, on a $x = f(y)$ et $f(x) = f^2(y) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$, puis $x = f(y) = 0$. Donc $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

II.C. Le polynôme caractéristique χ_f de f annule f (théorème de Cayley-Hamilton). L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal non nul de $\mathbb{R}[X]$, donc de la forme $\mathbb{R}[X]\cdot P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est unitaire, de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de f, c'est du cours même si le terme de **polynôme minimal** n'est pas cité dans le programme de PSI.

II.C.1) On a $P = QR$, avec $\deg R < \deg P$, $R \neq 0$. Donc $0 = P(f) = Q(f) \circ R(f)$. L'endomorphisme $R(f)$ ne peut être nul (cela contredirait la minimalité du degré de P), donc $Q(f)$ n'est pas inversible (sinon, on déduirait $R(f) = \big(Q(f)\big)^{-1} \circ 0 = 0$, absurde).

II.C.2) Si $P(\lambda) = 0$, alors le polynôme $Q = X - \lambda$ divise P, donc $Q(f) = f - \lambda\, \mathrm{id}_E$ est non inversible, donc non injectif (dimension finie), ce qui entraîne que λ est valeur propre de f, donc $\lambda = 0$ d'après **II.A.**
Remarque. Ce raisonnement montre de façon plus générale que les valeurs propres d'un endomorphisme f sont exactement les racines de son polynôme minimal.

Soit maintenant r l'ordre de multiplicité de la racine 0 dans le polynôme P ; on a alors $P = X^r Q$ avec $Q(0) \neq 0$, donc les polynômes X^r et Q sont premiers entre eux. De $P(f) = 0$ et du théorème des noyaux (*désormais hors programme PSI*), on déduit que $E = \operatorname{Ker} f^r \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$. Mais de la question **II.B.**, on déduit par une récurrence immédiate que $\operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f$, donc $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$: le polynôme XQ annule alors f, ce qui entraîne $r = 1$ (minimalité de P).

II.C.3) Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $P = X$ et ce polynôme annule f, autrement dit $f = 0$.

II.C.4) Les complexes λ et $\overline{\lambda}$ sont racines de P, donc P est divisible par le polynôme réel $Q = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2-(2k\cos\varphi)X+k^2$, l'endomorphisme $Q(f) = f^2-(2k\cos\varphi)f+k^2\,\mathrm{id}_E$ est donc non injectif, d'où l'existence de x_0. De la question **I.D.3.**, on déduit alors que $\cos\varphi = 0$. Les racines de P sont donc imaginaires pures.

II.C.5) Posons $g = f^2 + k^2\ \mathrm{id}_E^2$. De la question **I.E.**, on déduit que tout élément de $\operatorname{Ker} g^2$ est nécessairement dans $\operatorname{Ker} g$, d'où l'égalité de ces deux noyaux.

II.C.6) Le polynôme P admet au moins une racine non nulle dans $\mathbb{C}$, sinon $P = X$ et $f = 0$, exclu. Soit donc $\lambda = ik$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$) une racine de P ; alors $\overline{\lambda} = -ik$ est aussi racine de P avec la même multiplicité r. On a alors $P = (X-\lambda)^r(X-\overline{\lambda})^r Q = (X^2+k^2)^r Q$, le polynôme Q étant premier avec $(X^2+k^2)^r$. Donc $E = \operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker}(f^2+k^2\ \mathrm{id}_E)^r \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$. De la question précédente, on tire alors $E = \operatorname{Ker}(f^2+k^2\ \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$, donc le polynôme $(X^2+k^2)Q$ annule f, et $r = 1$ par minimalité de P. Suivant que 0 est ou non racine de P, on obtient l'une des deux factorisations proposées par l'énoncé.

II.D.i) • Si $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X^2+a_i^2)$, posons $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X+a_i^2)$. Alors le polynôme S est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et il annule l'endomorphisme f^2, donc f^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont parmi les racines de S, à savoir les $-a_i^2$ qui sont des réels strictement négatifs.

• Si $P = X\displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X^2+a_i^2)$, alors le polynôme XP annule aussi f, mais $X\,P(X) = S(X^2)$ en posant $S = X\displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X+a_i^2)$, donc S est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples (négatives ou nulles) qui annule f, et de nouveau f est diagonalisable, ses valeurs propres étant maintenant des réels négatifs ou nuls.

ii) On a vu que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Du théorème du rang, on déduit immédiatement que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.

Soit $-a^2$ une valeur propre strictement négative de f^2 (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$). Notons K le polynôme caractéristique de f^2, on a, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} K(x^2) &= \det(f^2 - x^2\,\mathrm{id}_E) = \det\big((f - x\,\mathrm{id}_E)(f + x\,\mathrm{id}_E)\big) \\ &= \big(\det(f - x\,\mathrm{id}_E)\big)\big(\det(f + x\,\mathrm{id}_E)\big) = \chi_f(x)\,\chi_f(-x)\,. \end{aligned}$$

En particulier, $0 = K(-a^2) = \chi_f(ia)\,\chi_f(-ia) = |\chi_f(ia)|^2$ puisque, le polynôme χ_f étant à coefficients réels, les nombres $\chi_f(ia)$ et $\chi_f(-ia)$ sont conjugués. Si r est la multiplicité commune des racines conjuguées ia et $-ia$ dans le polynôme réel χ_f (et donc aussi dans le polynôme $\chi_f(-X)$), on voit qu'il y aura $2r$ facteurs $X^2 + a^2$ dans la décomposition du polynôme $K(X^2)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, donc $2r$ facteurs $X+a^2$ dans celle du polynôme $K = \chi_{f^2}$. La multiplicité de la valeur propre $-a^2$ de f^2 (qui est aussi la dimension du sous-espace propre associé puisque f^2 est diagonalisable) est donc paire.

II.E. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul, vérifiant **i)** et **ii)**. Comme f est diagonalisable et non nul, il a d'autres valeurs propres que 0. Notons $-a_i^2 \quad (1 \leq i \leq s)$ les valeurs propres strictement négatives distinctes de f^2 (avec $a_i \in \mathbb{R}_+^*$), et $E_i = \mathrm{Ker}(f^2 + a_i^2 \,\mathrm{id}_E)$ les sous-espaces propres associés. Comme f^2 est diagonalisable, E est la somme (directe) de ses sous-espaces propres :

$$E = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{s} E_i\Big) = \mathrm{Ker}\, f \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{s} E_i\Big)$$

puisque l'égalité $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$ entraîne $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. Les sous-espaces propres E_i sont non nuls et stables par f (car ce sont des noyaux de polynômes en f). On a vu en **II.D.** que la propriété **i)** entraîne que les sous-espaces propres $E_i = \mathrm{Ker}(f^2 + a_i^2 \,\mathrm{id}_E)$ sont de dimensions paires. Si $x \in E_i$, on a bien $f^2(x) = -a_i^2 x$. On a donc vérifié **(1)** et **(2)**.

• Si $x_0 \in \mathrm{Ker}\, f$, alors sa f-trajectoire est $\{x_0\}$. Si $x_0 \in E_i \setminus \{0\}$, sa f-trajectoire est une ellipse (question **I.D.3.**), donc est bornée. Si on a $x_0 \in E$ quelconque, on décompose en $x_0 = x_{00} + \sum_{i=1}^{s} x_{0i}$ avec $x_{00} \in \mathrm{Ker}\, f$ et $x_{0i} \in E_i$; la linéarité de l'équation différentielle $x' = f(x)$ fait que la solution x du problème de Cauchy $\mathcal{P}(f, x_0)$ dépend linéairement de la condition initiale x_0, donc est combinaison linéaire de fonctions bornées, donc reste bornée. On a bien $f \in B(E)$.

Partie III : Étude des endomorphismes à trajectoires sphériques

III.A.1) • Si $f^* + f = 0$, alors $\big(f(x)|y\big) = -\big(x|f(y)\big)$ pour tous vecteurs x et y de E ; en particulier, $\big(f(u)|u\big) = -\big(u|f(u)\big)$, donc $\big(f(u)|u\big) = 0$ pour tout vecteur u de E.

• Si f vérifie la propriété **b)** alors, pour tous vecteurs x et y de E, on a

$$0 = \big(x+y|f(x+y)\big) = \big(x|f(y)\big) + \big(y|f(x)\big)$$

puisque les termes $\big(x|f(x)\big)$ et $\big(y|f(y)\big)$ sont nuls. On a donc $\big(x|f(y)\big) = -\big(f(x)|y\big)$, d'où $f^* = -f$.

III.A.2) On a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|x(t)\|^2\big) = 2\,\big(x(t)|x'(t)\big) = 2\,\big(x(t) \mid f(x(t))\big) = 0$, donc $\|x(t)\|$ est constant et toute f-trajectoire x est sphérique. Ainsi, $A(E) \subset SP(E)$.

III.B. Soit $x_0 \in F$. Sa f_F-trajectoire x, qui coïncide avec sa f-trajectoire (puisque celle-ci est contenue dans F), est contenue dans une sphère de E :

$$\exists \gamma \in E \quad \exists r \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \|x(t) - \gamma\| = r \\ \qquad x(t) \in F \end{cases}.$$

Mais l'intersection avec F d'une sphère de E est une sphère de F (si cette intersection est non vide). En effet, si δ est le projeté orthogonal de γ sur F, soit $d = d(\gamma, F) = \|\gamma - \delta\|$, alors pour $x \in F$ on a, par Pythagore,

$$\|x - \gamma\|^2 = \|x - \delta\|^2 + \|\delta - \gamma\|^2 = \|x - \delta\|^2 + d^2$$

donc $\|x-\gamma\| = r \iff \|x-\delta\| = \sqrt{r^2-d^2}$. La f_F-trajectoire de x_0 est donc contenue dans une sphère de F. Donc $f_F \in SP(F)$.

III.C. Évident, toute sphère est bornée.

III.D.1) Comme $f \in B(E)$, de la question **II.D.**, on déduit que f^2 est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(f^2) \subset \mathbb{R}_-$. Comme $f \neq 0$ et que les sous-espaces propres (autres que le noyau) sont de dimension paire, on déduit que $f^2 = -a^2\ \mathrm{id}_E$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

III.D.2) L'endomorphisme f et le vecteur non nul x_0 vérifient la condition $(f^2 + a^2\,\mathrm{id}_E)(x_0) = 0$ avec $a > 0$. Il résulte alors de la question **I.D.** que la famille $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est libre donc est une base de E (d'où l'existence de α et β)... mais il résulte surtout de **I.D.3.** que, la f-trajectoire de x_0 étant supposée être un cercle, ce cercle est de centre O (donc en fait $a = 0$) et que $\big(x_0|f(x_0)\big) = 0$.

III.D.3) On sait que, de façon générale, $A(E) \subset SP(E)$ et on vient de prouver ici que $SP(E) \subset A(E)$.

III.E.1) Si $v = 0$, alors $\psi : u \mapsto \omega \wedge u$ est antisymétrique : en effet, $\omega \wedge u$ est orthogonal à u, donc $\big(\psi(u)|u\big) = 0$ pour tout u.

Réciproquement, si ψ est antisymétrique, alors $\forall u \in E \quad \big(\psi(u)|u\big) = 0$, c'est-à-dire $\forall u \in E \quad (u|\omega)\,(u|v) = 0$, donc $(\mathbb{R}\omega)^\perp \ \cup\ (\mathbb{R}v)^\perp = E$, ce qui entraîne que $v = 0$ (car E n'est pas la réunion de deux plans).

III.E.2) Soit x la ψ-trajectoire de x_0. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t)|\omega\big) = \big(x'(t)|\omega\big) = \big(\psi(x(t))|\omega\big) = \big(\omega \wedge x(t)|\omega\big) + \big(x(t)|\omega\big)\,\big(v|\omega\big) = 0\,,$$

donc $t \mapsto \big(x(t)|\omega\big)$ est une fonction constante, notons C sa valeur.

On cherche maintenant un point de la forme $a = \alpha(\omega + \omega \wedge v)$ tel que $\|x(t) - a\|^2$ soit constant. Or,

$$\begin{aligned}
\|x-a\|^2 &= \|x - \alpha(\omega + \omega \wedge v)\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\alpha\,(x|\omega) - 2\alpha\,(x|\omega \wedge v) + \alpha^2\,\|\omega + \omega \wedge v\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\alpha\,(x|\omega \wedge v) + C'
\end{aligned}$$

où C' est une constante. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|x(t)-a\|^2\big) &= 2\,(x'|x) - 2\alpha\,(x'|\omega \wedge v) \\
&= 2\,\big(\psi(x)|x\big) - 2\alpha\,\big(\psi(x)|\omega \wedge v\big) \\
&= 2\,\big(\omega \wedge x + (x|\omega)\,v \mid x\big) - 2\alpha\,\big(\omega \wedge x + (x|\omega)\,v \mid \omega \wedge v\big) \\
&= 2\,(x|\omega)\,(x|v) - 2\alpha\,(\omega \wedge x \mid \omega \wedge v)\,.
\end{aligned}$$

Un petit calcul classique, en notant $[\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ le produit mixte de trois vecteurs et en utilisant la formule du double produit vectoriel, donne

$$(\omega \wedge x \mid \omega \wedge v) = [\omega, x, \omega \wedge v] = \big(\omega \mid x \wedge (\omega \wedge v)\big) = \big(\omega \mid (x|v)\,\omega - (x|\omega)\,v\big) = (x|v)\,\|\omega\|^2\,.$$

Finalement, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|x(t)-a\|^2\big) = 2\,(x|v)\,\big[(x|\omega) - \alpha\,\|\omega\|^2\big]$, donc $\|x(t)-a\|$ est constant si on choisit $\alpha = \dfrac{C}{\|\omega\|^2}$, où C est la valeur constante de $\big(x(t)|\omega\big)$ introduite plus haut.

En conclusion, pour tout $x_0 \in E$, la ψ-trajectoire de x_0 est incluse dans une sphère de centre $a = \dfrac{(x_0|\omega)}{\|\omega\|^2}(\omega + \omega\wedge v)$, et $\psi \in SP(E)$. Tout endomorphisme de la forme $u \mapsto \omega \wedge u + (u|\omega)v$ avec v orthogonal à ω (nul ou non) est à trajectoires sphériques.

III.E.3) Si $f \in SP(E)$, alors $f \in B(E)$ donc, de **II.D.**, on déduit que f^2 est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(f^2) \subset \mathbb{R}_-$, les valeurs propres strictement négatives étant de multiplicité paire. Comme $\dim E = 3$, la seule possibilité est que f^2 admette 0 comme valeur propre simple ($\dim \mathrm{Ker}\, f^2 = 1$), et une valeur propre double strictement négative $-\mu^2$. Dans une base adaptée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E, la matrice de f^2 est $\mathrm{diag}(-\mu^2, -\mu^2, 0)$; il apparaît alors que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Ker}(f^2 + \mu^2\, \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. D'autre part, on a aussi $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ d'après **II.D.**, ce qui permet de conclure.

III.E.4) Posons $F = \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f^2 + \mu^2\, \mathrm{id}_E)$. On a $\dim F = 2$, soit e_3 un vecteur directeur unitaire de la droite $F^\perp$.

- Si $f(e_3) \neq 0$, posons $e_1 = \dfrac{f(e_3)}{\|f(e_3)\|} \in F$;
- Si $f(e_3) = 0$, soit e_1 un vecteur unitaire quelconque dans F.

On a alors $\|e_1\| = \|e_3\| = 1$ et $(e_1|e_3) = 0$. En posant $e_2 = e_3 \wedge e_1$, on obtient ainsi une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E, (e_1, e_2) étant une base orthonormale de F. Le plan $F = \mathrm{Im}\, f$ est stable par f, donc $f_F \in SP(F) = A(F)$ d'après les questions **III.B.** et **III.D.3.** La matrice de f_F dans la base orthonormale (e_1, e_2) est donc antisymétrique et a pour carré $-\mu^2\, I_2$, c'est donc $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, ou son opposé ce qui ne change rien... Enfin, $f(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_1)$, donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\mu & b \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On reconnaît la matrice dans cette base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $x \mapsto \mu\, e_3 \wedge x + b(x|e_3)\, e_1$, qui est bien de la même forme que ψ avec $\omega = \mu e_3$ (vecteur non nul) et $v = \dfrac{b}{\mu}\, e_1$ (orthogonal à ω). Les endomorphismes à trajectoires sphériques en dimension trois sont exactement ceux de la forme ψ.

III.F. Si $f^2 = -\mu^2\, \mathrm{id}_E$, alors pour tout vecteur x_0 non nul de E, la famille $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est libre, et le plan P qu'elle engendre est stable par f. On a donc $f_P \in SP(P)$ d'après **III.B.**, puis $\big(x_0|f(x_0)\big) = 0$ d'après **III.D.** Ceci étant vrai pour tout vecteur x_0 de E, cela signifie que f est antisymétrique.

III.G. • Si $f \in SP(E)$, alors $f \in B(E)$ donc $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ d'après **II.B.** Par ailleurs, d'après **II.D.**, on a $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_i$, avec $E_i = \mathrm{Ker}(f^2 + a_i^2\, \mathrm{id}_E)$, les a_i étant des réels strictement positifs deux à deux distincts. Chaque E_i est stable par f, donc $f_{E_i} \in SP(E_i)$ d'après **III.B.**, puis f_{E_i} est antisymétrique d'après **III.F.** Pour montrer que f_V (en notant $V = \mathrm{Im}\, f$) est antisymétrique, il suffit de montrer que les sous-espaces E_i sont deux à deux orthogonaux. Or, si $x_i \in E_i$ et $x_j \in E_j$ avec $i \neq j$, on a $f^2(x_i) = -a_i^2 x_i$ et, $(f_{E_j})^2$ étant symétrique, $(f^2)^*(x_j) = \big((f_{E_j})^2\big)^*(x_j) = (f_{E_j})^2(x_j) = -a_j^2 x_j$, donc

$$(x_i|x_j) = -\frac{1}{a_i^2}\big(f^2(x_i)|x_j\big) = -\frac{1}{a_i^2}\big(x_i|(f^2)^*(x_j)\big) = \frac{a_j^2}{a_i^2}(x_i|x_j)$$

puis $(x_i|x_j) = 0$ car $\dfrac{a_j^2}{a_i^2} \neq 1$.

• Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant **i)** et **ii)**, soit $x_0 \in E$, on le décompose en $x_0 = y_0 + z_0$ avec $y_0 \in \operatorname{Ker} f$ et $z_0 \in \operatorname{Im} f$. Posons $V = \operatorname{Im} f$. La f-trajectoire x de x_0 est la somme de la f-trajectoire y de y_0 et de la f-trajectoire z de z_0 par linéarité de l'équation différentielle. Or, $y(t) = y_0$ pour tout t, et z est aussi la f_V-trajectoire de z_0 puisque V est stable par f. Comme $f_V \in A(V)$, alors $\|z(t)\|$ est constant d'après **III.A.2.** Mais $z(t) = x(t) - y_0$, ainsi $\|x(t) - y_0\|$ reste constant, et la f-trajectoire de x_0 est contenue dans une sphère de centre y_0, où y_0 est le projeté de x_0 sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$. On a donc $f \in SP(E)$.