CENTRALE PSI I - 2004

PARTIE I

I.A) $g'(0) = h'(f(h^{-1}(0)) \times f'(h^{-1}(0)) \times (h^{-1})'(0)$

$$= h'(0) \times f'(0) \times \frac{1}{h'(h^{-1}(0))} \text{ compte tenu du fait que } h(0) = f(0) = 0$$

$$= h'(0) \times f'(0) \times \frac{1}{h'(0)} = f'(0)$$

I.B.1) $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \in \ ]0,1]$ puisque $f'(0) > 0$ et que $f(x) < x$.

I.B.2) Par récurrence, $0 \le f^n(x) \le f^{n-1}(x)$. On utilise pour cela le fait que f est croissante et positive, et que $f(x) \le x$. La suite $(f^n(x))$ est donc décroissante et, f étant continue, converge vers un point fixe de f. Or le seul point fixe est 0.

I.B.3) f étant croissante, on a $0 \le f^n(x) \le f^n(1)$ donc $\| f^n \|_\infty \le f^n(1)$ qui tend vers 0 d'après la question précédente.

I.C) $\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k)$. Or la série de terme général $\ln(1 + a_k)$ converge absolument puisque $|\ln(1 + a_k)| \sim |a_k|$, terme général d'une série convergente. Donc $\ln(P_n)$ admet une limite et donc P_n admet une limite strictement positive.

I.D) On sait déjà, d'après la question précédente, que la suite (Q_n) converge simplement vers une fonction strictement positive. Soit Q cette fonction limite. On a :

$Q - Q_n = \exp(\ln(Q)) - \exp(\ln(Q_n)) = (\ln(Q) - \ln(Q_n) \times \exp(\theta)$ avec θ valeur comprise entre $\ln(Q)$ et $\ln(Q_n)$ (égalité des accroissements finis). Remarquons que :

$$\ln(Q_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(\varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \psi_k) \qquad \text{or } - \| \psi_k \|_\infty \le \psi_k \le \| \psi_k \|_\infty$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - \| \psi_k \|_\infty \le 1 + \psi_k \le 1 + \| \psi_k \|_\infty$$

Comme $\| \psi_k \|_\infty$ tend vers 0, il existe N tel que, pour $k \ge N$, $0 < 1 - \| \psi_k \|_\infty \le 1 + \psi_k \le 1 + \| \psi_k \|_\infty$

$$\Rightarrow \qquad \ln(1 - \| \psi_k \|_\infty) \le \ln(1 + \psi_k) \le \ln(1 + \| \psi_k \|_\infty)$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{N} \ln(1 + \psi_k) + \sum_{k=N+1}^{n} \ln(1 - \| \psi_k \|_\infty) \le \ln(Q_n) \le \sum_{k=0}^{N} \ln(1 + \psi_k) + \sum_{k=N+1}^{n} \ln(1 + \| \psi_k \|_\infty)$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres qui encadrent $\ln(Q_n)$ convergent, ce qui implique que la suite $(\ln(Q_n))$ est bornée. θ, et donc $\exp(\theta)$, est donc une quantité bornée. Donc :

$$\| Q - Q_n \| \le \| \ln(Q) - \ln(Q_n) \| \times \text{Cte}$$

Quant à $\ln(Q) - \ln(Q_n)$, cette quantité vaut $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 + \psi_k)$, comprise entre $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 - \| \psi_k \|_\infty)$ et $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 + \| \psi_k \|_\infty)$ qui tendent toutes deux vers 0. Donc $\| \ln(Q) - \ln(Q_n) \|_\infty$ aussi et $\| Q - Q_n \|_\infty$ aussi.

PARTIE II

Dans cette partie, vu le II.B.1), on doit supposer $\lambda < 1$.

II.A) $u_n \circ f - h_\lambda \circ u_{n+1} = \dfrac{f^{n+1}}{\lambda^n} - \lambda \dfrac{f^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = 0$

II.B.1) Si $\lambda < 1$, $\lambda^2 < \lambda$, donc on peut choisir ε assez petit tel que, simultanément, $\lambda + \varepsilon < 1$ et $(\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda$.

II.B.2) Puisque $f\,'(0) = \lambda$, et que $f\,'$ est continue, on a $f\,' \leq \lambda + \varepsilon$ sur un voisinage $[0, a]$ de 0. L'inégalité des accroissement fini permet de conclure.

II.C.1) Inégalité de Taylor-Lagrange. Prendre C un majorant de $\dfrac{|f\,''|}{2}$ sur $[0,1]$.

II.C.2) Utiliser le fait que la suite (f^n) converge uniformément vers 0.

II.C.3) $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(x) - \lambda f^n(x)}{\lambda^{n+1}}$ or $f^n(x)$ appartient à $[0,a]$ pour $n \geq n_0$, donc on peut appliquer l'inégalité du II.B.2) :

$$0 \leq f^{n+1}(x) \leq (\lambda + \varepsilon) f^n(x) < f^n(x) \leq a$$

et par récurrence, $0 \leq f^n(x) \leq (\lambda + \varepsilon)^{n-n_0} f^{n_0}(x) \leq C' \times (\lambda + \varepsilon)^n$ avec $C' = \dfrac{\| f^{n_0} \|_\infty}{(\lambda + \varepsilon)^{n_0}}$. Par ailleurs :

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \left| f^{n+1}(x) - \lambda f^n(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda^{n+1}} C\,(f^n(x))^2 \text{ d'après II.C.1)}$$

$$\leq CC'^2 \frac{(\lambda + \varepsilon)^{2n}}{\lambda^{n+1}}$$

$\Rightarrow \quad \| u_{n+1} - u_n \|_\infty \leq CC'^2 \dfrac{(\lambda + \varepsilon)^{2n}}{\lambda^{n+1}}$ terme d'une série géométrique de raison $\dfrac{(\lambda + \varepsilon)^2}{\lambda} < 1$.

donc la série majorante converge et il en est de même de la série $\sum \| u_{n+1} - u_n \|_\infty$ donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement donc uniformément. Or les sommes partielles de cette série constituent la suite $(u_n - u_0)$, donc la suite (u_n) converge uniformément.

II.D.1) $u_{n+1} = \dfrac{1}{\lambda^{n+1}} f \circ (\lambda^n u_n) \Rightarrow u_{n+1}' = \dfrac{1}{\lambda} (f\,' \circ (\lambda^n u_n))\, u_n'$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 = \frac{1}{\lambda} f\,' \circ (\lambda^n u_n) - 1 = \frac{1}{\lambda} (f\,'(\lambda^n u_n) - f\,'(0))$$

D'où, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $f\,'$:

$\Rightarrow \quad \left\| \dfrac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 \right\|_\infty \leq \dfrac{1}{\lambda} \| f'' \|_\infty \| \lambda^n u_n \|_\infty \sim \lambda^{n-1} \| f'' \|_\infty \| u \|_\infty$ terme général d'une série convergente puisque $\lambda < 1$.

II.D.2) Donc la série de terme général $\dfrac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1$ converge normalement sur $[0,1]$, donc (I.D), la suite $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}'}{u_k'}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction strictement positive, mais cette suite n'est autre que $\dfrac{u_n'}{u_0'}$, donc la suite (u_n') converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction strictement positive, donc u est C^1 de dérivée u' limite des u_n' strictement positive, donc u est un C^1-difféomorphisme de $[0,1]$ sur $u([0,1])$. Comme $u(0) = 0$, cet intervalle est de la forme $[0,r]$ pour un certain $r > 0$.

II.E) Si on passe à la limite dans II.A), on obtient $u \circ f - h_\lambda \circ u = 0$ sur $[0,1]$ ou $h_\lambda = u \circ f \circ u^{-1}$ de $[0,r]$ sur un intervalle du même type.

PARTIE III

III.A.1) $\theta_q(0) = 0$ et $\theta_q(x) < x$ sur $]0,1]$ sont triviaux.

$\theta_q'(x) = \dfrac{1}{(1+x^q)^{1/q}} - \dfrac{x^q}{(1+x^q)^{1/q+1}} = \dfrac{1}{(1+x^q)^{1/q+1}} > 0$ et $\theta_q'(0) = 1$ donc $\theta_q \in E_1$.

θ_q est C^∞ avec, au voisinage de 0, $\theta_q(x) = x(1 - \dfrac{x^q}{q} + o(x^q)) = x - \dfrac{x^{q+1}}{q} + o(x^{q+1})$, donc $\theta_q^{(q+1)}(0)$ est la première dérivée supérieure à 1 non nulle en 0, autrement dit $\nu(\theta_q) = q$, et $\theta_q \in E_1$*.

III.A.2) a) $a > 0$ est nécessaire pour que $f(x) < x$ au voisinage de 0.

b) Il existe h C^1-difféomorphisme croissant de $[0,r]$ sur $[0,r']$ (et donc tel que $h(0) = 0$) vérifiant $g = h \circ f \circ h^{-1}$. D'après I.A), $g'(0) = f'(0) = 1$. En outre :

$f(x) = x - ax^{q+1} + o(x^{q+1})$

$\Rightarrow$ $g(x) = h(f(h^{-1}(x))) = h(h^{-1}(x) - ah^{-1}(x)^{q+1} + o(h^{-1}(x)^{q+1}))$

Or $h^{-1}(x) = (h^{-1})'(0)x + o(x)$ en 0, donc :

$g(x) = h(h^{-1}(x) - a(h^{-1})'(0)^{q+1}x^{q+1} + o(x^{q+1}))$

qui est de la forme $h(y + k)$ avec $y = h^{-1}(x)$ et $k = - a(h^{-1})'(0)^{q+1}x^{q+1} + o(x^{q+1})$

Or $h(y + k) = h(y) + h'(y+\theta k)k$ avec $0 < \theta < 1$ (accroissement finis)

Donc $g(x) = x + h'(y+\theta k)(- a(h^{-1})'(0)^{q+1}x^{q+1}) + o(x^{q+1})$

Enfin, $h'(y+\theta k) = h'(0) + o(1)$ car $y+\theta k$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Donc $g(x) = x + h'(0)(- a(h^{-1})'(0)^{q+1}x^{q+1}) + o(x^{q+1}) = x - a(h^{-1})'(0)^q x^{q+1} + o(x^{q+1})$

Donc g appartient à E_1* et $\nu(g) = q = \nu(f)$.

III.A.3) a) $h'(x) = 1 + \beta k x^{k-1}$ et il suffit de prendre r suffisamment petit pour que, dans $[0,r]$, on ait $h' > 0$.

b) $y = x + \beta x^k + o(x^k)$. Si on écrit le développement limité de h^{-1} sous la forme :

$x = y + a_2y^2 + ... + a_{k-1}y^{k-1} + a_ky^k + o(y^k)$

et si on remplace x par cette expression dans le développement limité de y, on a :

$y = y + a_2y^2 + ... + a_{k-1}y^{k-1} + a_ky^k + \beta(y + a_2y^2 + ... + a_{k-1}y^{k-1} + a_ky^k)^k + o(y^k)$

$= y + a_2y^2 + ... + a_{k-1}y^{k-1} + a_ky^k + \beta y^k + o(y^k)$

$\Rightarrow$ $a_2 = ... = a_{k-1} = 0$ et $a_k = - \beta$ par unicité du développement limité.

c) $h \circ f(x) = f(x) + \beta f(x)^k = x - ax^{q+1} + bx^{q+k} + \beta(x^k - kax^{q+k}) + o(x^{q+k})$

$= x + \beta x^k - ax^{q+1} + (b - ka\beta)x^{q+k} + o(x^{q+k})$

mais aussi $h \circ f(x) = h(x) - ax^{q+1} + (b - ka\beta)x^{q+k} + o(x^{q+k})$

Puis $h \circ f \circ h^{-1}(y) = y - a(y - \beta y^k + o(y^k))^{q+1} + (b - ka\beta)y^{q+k} + o(y^{q+k})$

$= y - ay^{q+1} + (q+1)a\beta y^{q+k} + (b - ka\beta)y^{q+k} + o(y^{q+k})$

$= y - ay^{q+1} + ((q+1-k)a\beta + b)y^{q+k} + o(y^{q+k})$

III.A.4) Si f vérifie les hypothèses du A.3), en choisissant β tel que $(q+1-k)a\beta + b = 0$, on obtient un conjugué $h \circ f \circ h^{-1}$ de $\mathcal{E}_1$* tel que $h \circ f \circ h^{-1}(y) = y - ay^{q+1} + o(y^{q+k})$. Si son développement limité et de la forme $y - ay^{q+1} + b'y^{q+k'} + o(y^{q+k'})$, on a donc $k' > k$. En itérant tant que $k \leq q$, on obtient des conjugués dont le terme qui suit $-ay^{q+1}$ est d'ordre strictement croissant. Au bout d'un nombre fini d'itérations, on parviendra au cas où cet ordre dépasse $2q$, soit une fonction dont le développement limité en 0 et $y - ay^{q+1} + b''y^{2q+1} + o(y^{2q+1})$. Si on conjugue enfin par une dernière fonction $h(x) = \lambda x$, on obtiendra comme développement limité :

$$\lambda(\frac{x}{\lambda} - \frac{ax^{q+1}}{\lambda^{q+1}} + b'''x^{2q+1} + o(x^{2q+1})) = x - \frac{ax^{q+1}}{\lambda^q} + b''''x^{2q+1} + o(x^{2q+1}).$$

En choisissant λ de façon que $\dfrac{a}{\lambda^q} = \dfrac{1}{q}$, on obtient la fonction désirée.

III.B.1) a) $T_q(x) = \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1}(x) = \tau_q \circ \theta_q(\frac{1}{x^{1/q}}) = \tau_q(\frac{1}{(1+x)^{1/q}}) = 1+x$

b) τ_q envoie 0 en ∞ et 1 sur 1 et est décroissant. Pour $x > 1$, $\tau_q^{-1}(x) > 0 \Rightarrow g(\tau_q^{-1}(x)) < \tau_q^{-1}(x)$ d'après (ii) $\Rightarrow \tau_q(g(\tau_q^{-1}(x)) > x$ car τ_q décroît donc $G(x) > x$.
Par ailleurs, $g'(x) > 0$ d'après iii) donc $G'(x) = \tau_q'(g(\tau_q(x))\, g'(\tau_q^{-1}(x))\, (\tau_q^{-1})'(x) > 0$.

c) $g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1}) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + O(y^{2q+2})$ donc

$$G(x) = \tau_q(g(\frac{1}{x^{1/q}})) = \tau_q(\frac{1}{x^{1/q}} - \frac{1}{q}\frac{1}{x^{1/q}}\frac{1}{x} + E\,\frac{1}{x^{1/q}}\frac{1}{x^2} + O(\frac{1}{x^{2+2/q}}))$$
$$= x\,(1 - \frac{1}{qx} + \frac{E}{x^2} + O(\frac{1}{x^{2+1/q}}))^{-q} = x(1 + \frac{1}{x} - \frac{qE}{x^2} + \frac{q+1}{2qx^2} + O(\frac{1}{x^{2+1/q}}))$$
$$= x + 1 + (\frac{q+1}{2q} - qE)\,\frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^{1+1/q}}).$$

III.B.2) a) Il existe X tel que, pour $x > X$, $G(x) > x + \frac{2}{3}$. Par ailleurs, $G^n = \tau_q \circ g^n \circ \tau_q^{-1}$ avec $g^n \circ \tau_q^{-1}$ qui converge uniformément vers 0 (cf I.B.3)) donc, pour tout $A > 0$, il existe N, $\forall\, n \geq N$, $\forall\, x > 1$, $g^n \circ \tau_q^{-1}(x) < \frac{1}{A}$, donc $G^n(x) > \tau_q(\frac{1}{A}) = A^q$. Si on choisit A de façon que $A^q = X$, alors :

$\exists\, N, \forall\, n \geq N, G^n(x) > X$ et donc $G^{n+1}(x) > G^n(x) + \frac{2}{3}$ et par récurrence, pour tout k :

$G^{N+k}(x) \geq G^N(x) + \frac{2k}{3} > x + \frac{2k}{3}$ (en utilisant le fait que $G(x) > x$)

ce qu'on peut écrire : $\forall\, m \geq N, \forall\, x \geq 1, G^m(x) \geq x + \frac{2(m-N)}{3}$

Si on choisit $n_0 = 4N$, alors, $\forall\, n \geq n_0, \forall\, x \geq 1$:

$$G^n(x) \geq x + \frac{2(n-N)}{3} = x + \frac{n}{2} + (\frac{n}{6} - \frac{2N}{3}) \geq x + \frac{n}{2} + (\frac{n_0}{6} - \frac{2N}{3}) = x + \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2}$$

b) Comme $G(x) = x + 1 + \frac{R}{x} + O(\frac{1}{x^{1+1/q}})$, il existe une constante M tel que $\left|O(\frac{1}{x^{1+1/q}})\right| \leq \frac{M}{x^{1+1/q}}$ pour tout x. Si on remplace x par $G^n(x)$, on obtient pour tout n et tout x :

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{R}{G^n(x)} + \frac{M}{(G^n(x))^{1+1/q}}$$

Si on prend $n \geq n_0$, on obtient, pour tout $x \geq 1$:

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{R}{x + n/2} + \frac{M}{(x + n/2)^{1+1/q}} \leq \frac{2R}{n} + \frac{M}{(n/2)^{1+1/q}} = O(\frac{1}{n}) \leq \frac{C}{n}$$ pour une certaine constante C.

Entre 1 et X, $u_{n_0}(x)$ est bornée. Par ailleurs, pour $n \geq n_0$:

$$u_n(x) = (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \ldots + (u_{n_0+1}(x) - u_{n_0}(x)) + u_{n_0}(x)$$

$\Rightarrow$ $|u_n(x)| \leq \frac{C}{n-1} + \frac{C}{n-2} + \ldots + \frac{C}{n_0} + \text{Cte} \sim C\ln(n) = O(\ln(n)) \leq K\ln(n)$ pour une certaine constante K.

c) $v_{n+1}(x) - v_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x) - R\ln(1 + \frac{1}{n}) = G^{n+1}(x) - G^n(x) - 1 - R\ln(1 + \frac{1}{n})$

Or, pour $n \geq n_0$ et $x \in [1,X]$, $\| G^n - n \|_\infty = \| u_n \|_\infty \leq K\ln(n)$

$\Rightarrow$ $n - K\ln(n) \leq \| G^n \|_\infty \leq n + K\ln(n)$

Or $\quad G(x) = x + 1 + \dfrac{R}{x} + O(\dfrac{1}{x^{1+1/q}})$ avec $\left|O(\dfrac{1}{x^{1+1/q}})\right| \leq \dfrac{M}{x^{1+1/q}}$ donc si on remplace x par $G^n(x)$ pour $n \geq n_0$ et $x \in [1,X]$, alors :

$$G^{n+1}(x) = G^n(x) + 1 + \frac{R}{G^n(x)} + O(\frac{1}{n^{1+1/q}})$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1}(x) - v_n(x) = \frac{R}{G^n(x)} - R\ln(1 + \frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n^{1+1/q}})$$

$$= \frac{R}{G^n(x)} - \frac{R}{n} + O(\frac{1}{n^{1+1/q}})$$

$$= \frac{R(n - G^n(x))}{G^n(x)n} + O(\frac{1}{n^{1+1/q}})$$

$$\Rightarrow \quad \| v_{n+1} - v_n \|_\infty \leq |R| \, \| \frac{n - G^n}{nG^n} \|_\infty + O(\frac{1}{n^{1+1/q}}) \leq \frac{|R|K\ln(n)}{n(n - K\ln(n))} + O(\frac{1}{n^{1+1/q}}) = O(\frac{1}{n^{1+1/q}})$$ terme général d'une série convergente. Donc $\sum \| v_{n+1} - v_n \|_\infty$ converge donc la série $\sum v_{n+1} - v_n$ converge normalement donc uniformément. Or les sommes partielles de cette série constituent la suite $(v_n - v_0)$, donc la suite (v_n) converge uniformément.

d) $v_n \circ G(x) = u_n(G(x)) - R\ln(n) = G^{n+1}(x) - n - R\ln(n) = u_{n+1}(x) + 1 - R\ln(n)$

$$= v_{n+1}(x) + 1 + R\ln(1 + \frac{1}{n})$$

Si on passe à la limite, on obtient $v \circ G(x) = v(x) + 1$.

III.B.3) a) Il n'existe pas de théorème disant que, si G admet un développement limité, alors G' aussi (physiquement, ce n'est pas parce qu'une particule a un déplacement d'amplitude petite que sa vitesse sera petite). On revient donc à la définition de G :

$$G(x) = \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1}(x)$$

Par contre, quand x tend vers l'infini, $\tau_q^{-1}(x)$ tend vers 0, et g étant C^∞, sa dérivée aussi, donc celle-ci admet un développement limité en 0 qui, cette fois, est bien la dérivée de celui de g (formule de Taylor sur g et g' en 0). Donc $g'(y) = 1 - \dfrac{q+1}{q} y^q + O(y^{2q})$. On a alors :

$$G'(x) = \tau_q'(g(\tau_q(x))\, g'(\tau_q^{-1}(x))\, (\tau_q^{-1})'(x)$$

$$= -\frac{q}{g(\tau_q^{-1}(x))^{q+1}} (1 - \frac{q+1}{qx} + O(\frac{1}{x^2}))\, (-\frac{1}{q})\, \frac{1}{x^{1+1/q}}$$

$$= \frac{1}{g(1/x^{1/q})^{q+1}} (1 - \frac{q+1}{qx} + O(\frac{1}{x^2}))\, \frac{1}{x^{1+1/q}}$$

Or $\quad g(\dfrac{1}{x^{1/q}}) = \dfrac{1}{x^{1/q}} - \dfrac{1}{qx^{1+1/q}} + O(\dfrac{1}{x^{2+1/q}}) = \dfrac{1}{x^{1/q}} (1 - \dfrac{1}{qx} + O(\dfrac{1}{x^2}))$

$$\Rightarrow \quad g(\frac{1}{x^{1/q}})^{-(q+1)} = x^{1+1/q} (1 + \frac{q+1}{qx} + O(\frac{1}{x^2}))$$

$$\Rightarrow \quad G'(x) = (1 + \frac{q+1}{qx} + O(\frac{1}{x^2}))(1 - \frac{q+1}{qx} + O(\frac{1}{x^2})) = 1 + O(\frac{1}{x^2})$$

b) G est une application croissante de $[1,+\infty[$ dans un intervalle $[r,+\infty[$, donc $x \to G^n(x)$ est croissante, donc $x \to u_n(x)$ est croissante donc $x \to v_n(x)$ est croissante, donc $x \leq y \Rightarrow v_n(x) \leq v_n(y)$ donc en passant à la limite, v est croissante. Elle admet une limite L en $+\infty$, éventuellement infinie. Si on fait tendre x vers $+\infty$ dans la relation $v(G(x)) = v(x) + 1$, en tenant compte que G tend vers l'infini, on obtiendrait $L = L + 1$ si L était finie. Donc L est infinie.

Puis, en se plaçant sur un segment $[1,X]$:

$v_n' = u_n'$ donc $\dfrac{v_{n+1}'}{v_n'} - 1 = \dfrac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 = \dfrac{(G(G^n))'}{(G^n)'} - 1 = G'(G^n) - 1$

Or $G'(x) = 1 + O(\frac{1}{x^2})$, i.e. $\exists$ M, tel que, $\forall$ x, $|G'(x) - 1| \leq \frac{M}{x^2}$, mais pour tout x dans $[1,+\infty[$, $G^n(x) \geq G^n(1)$ car G^n est croissante, donc $|G'(G^n(x)) - 1| \leq \dfrac{M}{(G^n(x))^2} \leq \dfrac{M}{(G^n(1))^2} = O(\frac{1}{n^2})$ en utilisant l'encadrement du (III.B.2.c) $n - K \ln(n) \leq \| G^n \|_\infty \leq n + K \ln(n)$ en 1, pour n assez grand.

Donc, sur $[1,+\infty[$, $\| \dfrac{v_{n+1}'}{v_n'} - 1 \|_\infty = O(\frac{1}{n^2})$ donc etc... comme au II.D.2). On en déduit que v est C^1 strictement positive sur tout segment, donc C^1 sur $[1,+\infty[$, avec convergence uniforme de (v_n') vers v' sur $[1,+\infty[$.

III.B.4) a) On a successivement, $\lim_{x \to +\infty} G'(x) = 1$, pour tout n (par récurrence) $\lim_{x \to +\infty} (G^n)'(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} u_n'(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} v_n'(x) = 1$ et enfin, $\lim_{x \to +\infty} v(x) = 1$ (permutation de $\lim_{x \to +\infty}$ et de $\lim_{n \to +\infty}$ en utilisant la convergence uniforme de (v_n') sur $[1,+\infty[$).

b) f est conjugué à g de la forme III.A.4). Ainsi, il existe h tel que :

$f = h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1} \circ \tau_q^{-1} \circ G \circ \tau_q \circ h$

Or (III.B.2.d) et (III.B.1.a), $v \circ G = T_q \circ v$ donc $G = v^{-1} \circ T_q \circ v$ et :

$f = h^{-1} \circ \tau_q^{-1} \circ v^{-1} \circ T_q \circ v \circ \tau_q \circ h$

$= h^{-1} \circ \tau_q^{-1} \circ v^{-1} \circ \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1} \circ v \circ \tau_q \circ h$

donc f est conjugué de θ_q.

III.C.1) a) Soit $f(x) = \mathrm{sh}(\sin(x))$. f est élément de $\mathcal{E}_1$* avec $f(x) = x - \dfrac{x^5}{15} + \dfrac{x^7}{90} + o(x^7)$ de la forme (III.A.3), avec $q = 4$. Donc il existe H tel que $f = H \circ T_4 \circ H^{-1}$. On a $w_{n+1} = f(w_n)$. Si on pose $z_n = H^{-1}(w_n)$, on a $z_{n+1} = T_4(z_n) = z_n + 1$ donc $z_n = z_0 + n$ et :

$w_n = H(n + z_0) = h^{-1} \circ \tau_4^{-1} \circ v^{-1}(n + z_0)$

$= h^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{v^{-1}(n + z_0)}}\right)$

$\sim (h^{-1})'(0) \dfrac{1}{\sqrt[4]{v^{-1}(n + z_0)}}$

Or comme $v' \to 1$ en $+\infty$, $y = v(x) \sim x$ (left to the reader) donc $x \sim y = v^{-1}(x)$ donc $v^{-1}(n + z_0) \sim n + z_0$ donc $w_n \sim \dfrac{(h^{-1})'(0)}{n^{1/4}}$.

b) Les calculs qui suivent ont été effectués en mode interactif avec Maple. On ne voit pas comment y parvenir "à la main". On a $f = H \circ T_4 \circ H^{-1} = H \circ \tau_4 \circ \theta_4 \circ \tau_4^{-1} \circ H^{-1} = \varphi \circ \theta_4 \circ \varphi^{-1}$ avec φ de classe C^1. Je ne vois pas comment résoudre cette question sans supposer a priori que φ admet un développement en 0 de façon que $f \circ \varphi = \varphi \circ \theta_4$. Avec cette supposition, et en prenant :

$$\varphi(x) = \sqrt[4]{\frac{15}{4}}\, x + \frac{\sqrt{2}\, 15^{3/4}}{48} x^3 + \frac{515\, 15^{1/4} \sqrt{2}}{2016} x^5 \ln(x) + o(x^5 \ln(x))$$

seul développement qui fait coïncider $f \circ \varphi$ et $\varphi \circ \theta_4$ jusqu'à l'ordre 10, on obtient :

$w_n = \varphi \circ \tau_4^{-1}(\frac{\pi}{8} + n)$

$$= \sqrt[4]{\frac{15}{4}}\,\frac{1}{n^{1/4}} + \frac{15^{3/4}\sqrt{2}}{48}\,\frac{1}{n^{3/4}} - \frac{515\ 15^{1/4}\sqrt{2}}{8064}\,\frac{\ln(n)}{n^{5/4}} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^{5/4}}\right)$$

mais tout cela reste très hypothétique.