Partie I - Généralités sur $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_n$

I.A.1) Les deux bases étant orthonormales, la matrice de passage est orthogonale.
Les matrices A et B sont donc orthogonalement semblables.

I.A.2) La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, la matrice de u^* est ${}^tA$.

Donc $u \in \mathcal{P}(E) \iff u^* \in \mathbb{R}[u] \iff {}^tA \in \mathbb{R}[A] \iff A \in \mathcal{P}_n$
et $u \in \mathcal{N}(E) \iff u^* \circ u = u \circ u^* \iff {}^tAA = A\,{}^tA \iff A \in \mathcal{N}_n$.

I.A.3) L'algèbre $\mathbb{R}[X]$ étant commutative, il en est de même des algébres $\mathbb{R}[u]$ et $\mathbb{R}[A]$.
On en déduit $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

I.B.1) Si $u \in S(E)$, on a $u^* = u \in \mathbb{R}[u]$; d'où $u \in \mathcal{P}(E)$ et $S(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

Si $u \in A(E)$, on a $u^* = -u \in \mathbb{R}[u]$; d'où $u \in \mathcal{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

I.B.2) Si A est triangulaire supérieure, alors $(\forall P \in \mathbb{R}[X])$ $P(A)$ est triangulaire supérieure et ${}^tA$ est triangulaire inférieure.
L'égalité ${}^tA = P(A)$ impose donc A diagonale.
Réciproquement, si A est diagonale, elle est symétrique et donc dans $\mathcal{P}_n$.

Les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{P}_n$ sont donc les matrices diagonales.

Si $n \geq 2$, il existe des matrices triangulaires supérieures qui ne sont pas diagonales, d'où $\mathcal{P}_n \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}(E) \neq \mathcal{L}(E)$.

I.B.3) Cours : le procédé de Schmidt donne une base orthonormale $\mathcal{B}'$ à partir d'une base $\mathcal{B}$ quelconque, et P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, est triangulaire supéieure.
La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1}, donc aussi triangulaire supérieure.

Si A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = P^{-1}AP$,
Le produit de matrices triangulaires supérieures étant encore triangulaire supérieure, on en déduit que A' est triangulaire supérieure.

Si u est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ où sa matrice est triangulaire supérieure.

D'aprés ce qui précède, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ où sa matrice A' est triangulaire supérieure.
Si, en outre, $u \in \mathcal{P}(E)$, la question I.B.2 montre que A' est diagonale.
On en déduit que u, diagonalisable dans une base orthonormale, est symétrique.
La question I.B.1 donnant la réciproque, on peut conclure :

$$\boxed{\text{les éléments trigonalisables de } \mathcal{P}(E) \text{ sont les endomorphismes symétriques}}$$

I.B.4) Théorème de Cayley-Hamilton : χ_u est annulateur de u.
Comme le terme constant de χ_u est $\det(u) \neq 0$, le polynôme $P = \chi_u$ convient.

Si on pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, la relation $P(u) = 0$ donne $u \circ \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u^{k-1} \Big) + a_0 Id = 0$.
Comme $a_0 \neq 0$, on en tire $u^{-1} = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{a_0}\, u^{k-1} \in \mathbb{R}[u]$.

Si $u \in O(E)$, alors $u^* = u^{-1} \in \mathbb{R}[u]$; d'où $u \in \mathcal{P}(E)$ et $O(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

I.C.1) <u>Existence</u> : Si $A \in \mathcal{P}_n$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$.
La division euclidienne de P par π_A donne $P = \pi_A Q + R$ avec $d^\circ(R) < d^\circ(\pi_A)$.
Comme $\pi_A(A) = 0$, on a ${}^tA = R(A)$ et le polynôme R convient.

<u>Unicité</u> : Si ${}^tA = P_1(A) = P_2(A)$, alors le polynôme $P_1 - P_2$ est annulateur de A.
On en déduit que $P_1 - P_2$ est multiple de π_A.
En considérant les degrés, on obtient $P_1 - P_2 = 0$, soit $P_1 = P_2$.

Résultat identique pour $u \in \mathcal{P}(E)$, grâce à la question I.A.2.

I.C.2) Si $P_A = a_0$ est constant, alors ${}^tA = a_0 I_n$ et la matrice A est scalaire.
Réciproque évidente.

I.C.3) Ecrivons $A = A_1 + A_2$ avec A_1 symétrique et A_2 antisymétrique.
Si $P_A = a_1 X + a_0$, on a ${}^tA = a_1 A + a_0 I_n$, soit $A_1 - A_2 = a_1 A_1 + a_1 A_2 + a_0 I_n$.
Par unicité des parties symétriques et antisymétriques, on en déduit :
$A_1 = a_1 A_1 + a_0 I_n$ et $-A_2 = a_1 A_2$.
La dernière équation donne $A_2 = 0$ ou $a_1 = -1$.
Si $A_2 = 0$, alors A est symétrique, non scalaire d'après la question précédente.
Si $a_1 = -1$, alors $2A_1 = a_0 I_n$ et $A = kI_n + A_2$ avec A_2 non nulle.

Réciproquement : si A est symétrique non scalaire, $P_A = X$; et si $A = kI_n + A_2$ avec A_2 antisymétrique non nulle, $P_A = -X + 2k$.

I.C.4) Si $B = P^{-1}AP$ avec $P \in O_n$, alors $P^{-1} = {}^tP$ et on a :
$P_A(B) = P^{-1}P_A(A)P = P^{-1}\,{}^tAP = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tB$.
Donc $B \in \mathcal{P}_n$ et, comme $\pi_A = \pi_B$, on a en outre $P_A = P_B$.

I.D Si $n = 2$, on déduit des questions I.C.2 et I.C.3 :
les éléments de $\mathcal{P}_2$ sont les matrices du type $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,
avec $P_A = a$ si $b = 0$ et $P_A = X$ ou $-X + 2a$ si $b \neq 0$.

I.E.1) Si π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux, le théorème de Bezout donne l'existence de deux polynômes U et V tels que $U\pi_{A_1} + V\pi_{A_2} = 1$.
On a alors l'égalité : $P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2}$.
Un produit par blocs donne par récurrence sur m : $A^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 \\ 0 & A_2^m \end{pmatrix}$.
D'où $P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & P(A_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 \\ 0 & P_2(A_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ 0 & {}^tA_2 \end{pmatrix} = {}^tA$.
Ainsi $A \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$

I.E.2) Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, le produit par blocs précédent montre que :
$Q(A) = 0 \iff (Q(A_1) = 0 \text{ et } Q(A_1) = 0) \iff (\pi_{A_1} | Q \text{ et } \pi_{A_2} | Q)$.
Comme π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux, on en déduit que $\pi_A = \pi_{A_1}\pi_{A_2}$.
La division euclidienne du polynôme $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}$ par π_A donne P_A.

I.F Les questions I.D et I.E.1 donnent $A \in \mathcal{P}_4$ avec $P_{A_1} = 1$ et $P_{A_2} = -X$.
On trouve sans peine $\pi_{A_1} = X - 1$ et $\pi_{A_2} = X^2 + 1$.
L'algorithme d'Euclide donne alors $U = -\frac{1}{2}(X + 1)$ et $V = \frac{1}{2}$.
D'où $P = \frac{1}{2}(X^3 + X^2 - X - 1)$ et $\pi_A = X^3 - X^2 + X - 1$.
Enfin, la division euclidienne de P par π_A donne $P_A = X^2 - X + 1$.

Partie II - Etude de $\mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{N}_n$

II.A Si $u \in \mathcal{N}(E)$, u et u^* commutent et il en est de même de $P(u)$ et de $P(u^*)$.
Comme $(P(u))^* = P(u^*)$, on en déduit que $P(u) \in \mathcal{N}(E)$.

II.B Si $u \in \mathcal{N}(E)$, on a $\big(u(x)|u(x)\big) = \big(u^*(u(x))|x\big) = \big(u(u^*(x)|x\big) = \big(u^*(x)|u^*(x)\big)$,
ce qui montre que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$.

D'où $x \in \operatorname{Ker} u \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|u^*(x)\| = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} u^*$.

II.C.1) Comme $\det {}^tA = \det A$, on a classiquement $\det f^* = \det f$.
Comme ici $f^* = -f$, on a aussi $\det f^* = (-1)^m \det f$.
Et comme $\det f \neq 0$, on en déduit $(-1)^m = 1$: m est pair.

II.C.2) Les applications $n : x \mapsto (x|x)$ et $g : x \mapsto (f(x)|f(x))$ sont des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^m$, donc des fonctions polynomiales de degré 2 des coordonnées de x.
Comme toute fonction polynômiale, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc différentiables.
Calculons $g(x+h) = (f(x+h)|f(x+h)) = g(x) + 2(f(x)|f(h) + g(h)$.
$h \mapsto 2(f(x)|f(h)$ étant linéaire et $h \mapsto g(h)$ étant quadratique, on en déduit que la différentielle de g est l'application $h \mapsto 2(f(x)|f(h)$.
Idem pour n en remplaçant f par Id.

La fonction n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et ne s'annulant pas sur U, son inverse est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ; on en déduit que q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, donc différentiable.

On a $dg = d\Big(\dfrac{g}{n}\Big) = \dfrac{ndg - gdn}{n^2}$, d'où $dq_x : h \mapsto 2\,\dfrac{\|x\|^2(f(x)|f(h)) - \|f(x)\|^2(x|h)}{\|x\|^4}$.

Tout $x \in U$ s'écrit $x = \lambda s$ avec $s \in S$ et on a $q(x) = \dfrac{g(\lambda s)}{n(\lambda s)} = \dfrac{\lambda^2 g(s)}{\lambda^2 n(s)} = q(s) \in q(S)$.
Comme $S \subset U$, on a aussi $q(S) \subset q(U)$ et l'égalité $q(U) = q(S)$.
S est la spère unité de $\mathbb{R}^m$; c'est un fermé borné, donc un compact de $\mathbb{R}^m$.
La fonction q étant continue sur ce compact, elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier sa borne supérieure qui est donc un maximum.
Comme $q(U) = q(S)$, q admet un maximum sur U, atteint en un point $x_0 \in S$.

La fonction q étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^m$, le point x_0 est un point critique de q et la différentielle de q en x_0 est nulle.
Comme $\|x_0\|^2 = 1$, on en déduit que $(\forall h \in \mathbb{R}^m)$ $(f(x_0)|f(h)) = \|f(x_0)\|^2(x_0|h)$. Puisque $f^* = -f$, on a $(\forall h \in \mathbb{R}^m)$ $(-f^2(x_0)|h) = \|f(x_0)\|^2(x_0|h)$.
Comme ceci est vrai pour tout h de $\mathbb{R}^m$, il vient $-f^2(x_0) = \|f(x_0)\|^2\, x_0$.

Remarque : on pouvait obtenir plus rapidement ce résultat en observant que f^2 est symétrique et en prenant pour x_0 un vecteur propre unitaire de f^2.
Mais pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

Il est alors immédiat que $\Pi = \text{Vect}(x_0, f(x_0))$ est stable par f.
C'est bien un plan car x_0 et $f(x_0)$ sont libres : $f(x_0) \perp x_0$ puisque f est antisymétrique et $f(x_0) \neq 0$ puisque f est un automorphisme et $x_0 \neq 0$.

Si on pose $y_0 = \dfrac{f(x_0)}{\|f(x_0)\|}$, la famille (x_0, y_0) est une base orthonormale de Π et la matrice de $f|_\Pi$ dans cette base est $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $b = \|f(x_0)\| \neq 0$.

II.C.3) Lemme : Si F est un sous-espace de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.
En effet, on a : $(\forall (x,y) \in F^\perp \times F)$ $(f^*(x)|y) = (x|f(y)) = 0$ puisque $f(y) \in F$,
ce qui montre que $x \in F^\perp \Rightarrow f^*(x) \in F^\perp$.

Si on prend $F = \Pi$, alors $\Pi^\perp$ est un espace de dimension $m-2$ stable par $f^* = -f$ et $f' = f|_{\Pi^\perp}$ est encore un automorphisme antisymétrique inversible.
On applique alors à f' la question II.C.2, puis on recommence.
On construit ainsi par récurrence descendante une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ où la matrice de f a l'aspect voulu.

II.D.1) Si E_1 est stable par u et u^*, le lemme vu à la question précédente donne :
$E_2 = E_1^\perp$ est stable par u^* et $(u^*)^* = u$.

II.D.2) La relation $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ étant vraie pour tout $(x,y) \in E$, elle est vraie pour tout $(x,y) \in E_1$; d'où $(u|_{E_1})^* = u^*|_{E_1}$.

II.D.3) Si u commute avec u^*, alors $u|_{E_1}$ commute avec $(u|_{E_1})^* = u^*|_{E_1}$.
Idem pour $u|_{E_2}$.

II.E Si u commute avec u^*, alors $u - \lambda Id$ commute avec $(u-\lambda Id)^* = u - \lambda Id$.
La question II.B donne alors $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$.
On en déduit que $u(x) = \lambda x \iff u^*(x) = \lambda x$, ce qui montre que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
Il est connu que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

Ici, ils sont en outre deux à deux orthogonaux, car, si $x \in E_u(\lambda)$, si $y \in E_u(\mu))$ et si $\lambda \neq \mu$, alors $(u(x)|y) = (x|u^*(y)) = \lambda(x|y) = \mu(x|y)$ entraine $(x|y) = 0$.

Les sous-espaces propres étant stables par u et u^*, leur somme directe l'est aussi.
La question II.D.1 montre alors que F est stable par u et u^*.
Si la restriction de u à F avait un vecteur propre, ce vecteur serait à la fois dans F et dans un $E_u(\lambda) \perp F$; il serait donc nul, ce qui est exclu pour un vecteur propre.
Le polynôme caractéristique de la restriction de u à F n'a donc pas de racine réelle.
Il est donc de degré pair, ce qui montre que F est de dimension paire.

II.F.1) L'endomorphisme s est visiblement symétrique.
Son polynôme caractéristique est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

II.F.2) Puisque $v \in \mathcal{N}(E)$, v commute avec v^*.
On vérifie alors sans peine que s commute avec a et avec v.

Puisque l'endomorphisme s est symétrique, il est diagonalisable et ses sous-espaces propres $E_s(\lambda_i)$ sont deux à deux orthogonaux.
Comme s et a commutent, les sous-espaces $E_s(\lambda_i)$ sont stables par a.
Si $\mathcal{B}_i$ est une base orthonormale de $E_s(\lambda_i)$, alors la matrice de s dans $\mathcal{B}_i$ est $\lambda_i I_{n_i}$, celle de a est A_i antisymétrique et celle de $v = s + a$ est $M_i = \lambda_i I_{n_i} + A_i$.
En prenant $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$, on obtient une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de v a l'aspect voulu.

II.F.3) Raisonnons par l'absurde et supposons que l'une des A_i ne soit pas inversible.
Il existerait alors un vecteur $x_i \neq 0$ dans $E_s(\lambda_i)$ tel que $a(x_i) = 0$.
On aurait alors $v(x_i) = s(x_i) + a(x_i) = \lambda_i x_i + 0 = \lambda_i x_i$ avec $x_i \neq 0$, ce qui donnerait λ_i valeur propre de v, contraire à l'hypothèse.
Donc les matrices A_i sont toutes inversibles.

II.G Reprenons $u \in \mathcal{N}(E)$ et la question II.E, en notant v la restriction de u à F.
D'après la question II.D.3, $v \in \mathcal{N}(F)$ et la question II.F.2 montre qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F où la matrice de v est diagonales par blocs.
On a vu à la question II.E que v n'avait pas de valeur propre et la question II.F.3 montre alors que chaque matrice antisymétrique A_i est

inversible.
La question II.C montre alors que les sous-espaces propres $E_s(\lambda_i)$ sont de dimension paire et que dans chacun d'eux il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'_i$ où la matrice de a a l'aspect donné au II.C.3.
En prenant une base orthonormale de $\bigoplus E_u(\lambda)$ et en la complétant par les bases $(\mathcal{B}'_i)_{1\le i\le k}$, on obtient une base orthonormale $\mathcal{B}$ où la matrice de u a l'aspect voulu.

II.H $A \in \mathcal{N}_n$ est la matrice de $u \in \mathcal{N}(E)$ dans une base orthonormale de E.
D'après la question précédente, il existe une base orthonormale de E où la matrice de u est A', d'un type particulier que nous appellerons " type II.G ".
D'après la question I.A, la matrice A est orthogalement semblable à A'.
Réciproquement, une matrice A' du type II.G appartient à $\mathcal{N}_n$: on vérifie en effet que les matrices τ_i commutent avec leur transposée.
En conclusion :

$$\boxed{A \in \mathcal{N}_n \iff A \text{ est orthogonalement semblable à une matrice du type II.G}}$$

II.I Si $u \in O(E)$, les valeurs propres figurant dans la matrice D valent 1 ou -1, et les matrices τ_i sont nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

Partie III - Relation entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{N}_n$

III.A.1) Si $\Delta = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$, alors $P(\Delta) = \begin{pmatrix} P(M_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(M_2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(M_k) \end{pmatrix}$.
D'où $\Delta = {}^t\Delta$ si et seulement si $P(M_i) = {}^tM_i$ pour $i = 1, \dots, k$.

III.A.2) Si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$, on a vu au I.D que $P_A = -X + 2a$.
Comme A n'est pas une matrice scalaire, π_A est de degré 2 au moins.
D'où $\pi_A = \chi_A = (X-a)^2 + b^2$.
La division euclidienne de $P \in \mathbb{R}[X]$ par π_A donne $P = \pi_A Q + R$ avec $d^\circ(R) \le 1$.
On a alors $P(A) = {}^tA \iff R(A) = {}^tA \iff R = P_A \iff R = -X + 2a$.
Si R est un polynôme quelconque de degré ≤ 1, on vérifie sans peine

que :
$R = -X + 2a \iff R(a+ib) = a - ib$ et $R(a-ib) = a+ib$.
Comme $\pi_A(a \pm ib) = 0$, on a $P(a \pm ib) = R(a \pm ib)$ et l'équivalence :

$$\boxed{P(A) = {}^tA \iff P(a+ib) = a - ib \text{ et } P(a-ib) = a+ib}$$

III.A.3) Soit $A \in \mathcal{N}_n$, orthogonalement semblable à une matrice B du type II.G. On a alors, en utilisant la question III.A.1 :
$P(A) = {}^tA \iff P(B) = {}^tB \iff P(D) = {}^tD$ et $P(\tau_k) = {}^t\tau_k$ pour $k = 1, \ldots, p$

La matrice diagonale D étant contituée par les valeurs propres réelles de A, on a l'équivalence : $P(D) = {}^tD \iff P(\lambda) = \lambda$ pour toute valeur propre réelle de A.
La question III.A.2 donne : $P(\tau_k) = {}^t\tau_k \iff P(z) = \overline{z}$ pour $z = a_k \pm ib_k$, c'est-à-dire pour tout z racine complexe non réelle de χ_A.

D'où l'équivalence demandée.

III.A.4) Le polynôme d'interpolation de Lagrange donne l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions précédentes (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$).
Les λ étant réels et les z complexes conjuguées (puisque A est réelle), on voit que le polynôme $\overline{P}$ vérifie aussi ces conditions.
L'unicité du polynôme de Lagrange donne $\overline{P} = P$, soit encore $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $A \in \mathcal{N}_n$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = {}^tA$; d'où $A \in \mathcal{P}_n$ et $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{P}_n$.
Comme l'inclusion inverse a été vue au I.A.3, on peut conclure que $\boxed{\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n}$

III.B Le polynôme P du III.A.4 vérifie $P(A) = {}^tA$ et est de degré minimal. D'après la question I.C.1, on a donc $P = P_A$.

Dans l'exemple de la question I.F, on a $\lambda = 1$ et $z = i$.
Le polynôme P doit donc vérifier $P(1) = 1$, $P(i) = -i$, $P(-i) = i$ et $d^\circ(P) \leq 2$.
D'où $P = 1\dfrac{(X-i)(X+i)}{(1-i)(1+i)} - i\dfrac{(X-1)(X+i)}{(i-1)(i+i)} + i\dfrac{(X-1)(X-i)}{(-i-1)(-i-i)}$
et un petit calcul permet de retrouver $P = X^2 - X + 1$.

Remarque : le problème aurait très bien pu s'arrêter ici.
Mais l'auteur du sujet a sans doute pensé qu'il n'était pas assez long et il a décidé d'en rajouter une louche.

III.C.1) La matrice J étant orthogonale, la question I.B.4 donne $J \in \mathcal{P}_n$.

On observe que $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i J^i = P(J)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$.

Les questions II.A et III.A.4 donnent alors $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

III.C.2) On a classiquement $\pi_J = X^n - 1$.
Soit R le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J.
On a donc $R(J) = (P_A \circ P)(J) = P_A(P(J)) = P_A(A) = {}^tA$.
Or $Q(J) = \alpha_0 I_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i J^{n-i} = \alpha_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k} J^k = C(\alpha_0, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1) = {}^tA$.
Le polynôme $R - Q$ est annulateur de J, c'est donc un multiple de π_J.
Vus les degrés, il est nul et $R = Q$.

D'où une méthode pour déterminer P_A :
poser P_A sous la forme d'un polynôme inconnu de degré $\leq n-1$, calculer $P_A \circ P$ en remplaçant tous les X^n par 1, et égaliser le résultat avec le polynôme Q ;
on obtient un système d'équations linéaires dont la solution fournit P_A.

Pour $A = C(1, 1, 0)$, on a $n = 3$, $\pi_J = X^3 - 1$, $P = 1 + X$ et $Q = 1 + X^2$.
Cherchons P_A sous la forme $P_A = aX^2 + bX + c$, avec a, b, c inconnus.
Alors $P_A \circ P = P_A(X + 1) = aX^2 + (2a + b)X + a + b + c$.
L'égalité $aX^2 + (2a + b)X + a + b + c = X^2 + 1$ donne $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$.
D'où $P_A = X^2 - 2X + 2$.

III.D Condition nécessaire :
Si χ_A était scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A serait trigonalisable donc symétrique d'après la question I.B.3 et P_A serait soit une constante soit le polynôme X.
Comme $a_2 \neq 0$, ce cas est exclu et χ_A possède des racines complexes non réelles.
Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $b \neq 0$ et $P(a + ib) = a - ib$.

Or $P(a + ib) = a - ib \iff \begin{cases} a_2(a^2 - b^2) + a_1 a + a_0 = a \\ a_2 2ab + a_1 b = -b \end{cases}$

Comme $a_2 \neq 0$ et $b \neq 0$, la deuxième équation équivaut à $a = -\dfrac{a_1 + 1}{2a_2}$.
La première équation équivaut alors à :

$$b^2 = \frac{a_2 a^2 + (a_1 - 1)a + a_0}{a_2} = \frac{(a_1 + 1)^2 - 2(a_1 - 1)(a_1 + 1) + 4a_0 a_2}{4a_2^2}$$

$= \dfrac{-a_1^2 + 2a_1 + 3 + 4a_0a_2}{4a_2^2} = \dfrac{4-\Delta}{4a_2^2}$, où on a posé $\Delta = (a_1-1)^2 - 4a_0a_2$.
Comme $4a_2^2b^2 > 0$, il faut $\Delta < 4$.

Le calcul précédent montre qu'il n'y a que deux complexes $a \pm ib$ possibles.
Si χ_A n'avait pas d'autres racines, alors on aurait $P_A = -X + 2a$.
Comme ce cas est exclu, χ_A a d'autres racines, nécessairement réelles.
Or l'équation $P(\lambda) = \lambda$ s'écrit $a_2\lambda^2 + (a_1-1)\lambda + a_0 = 0$.
C'est une équation du second degré de discriminant $(a_1-1)^2 - 4a_0a_2 = \Delta$.
Pour qu'elle ait une solution réelle, il faut $\Delta \geq 0$.

D'où la condition nécessaire : $\Delta \in [0, 4[$.

Condition suffisante :
Le discriminant Δ étant positif, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = \lambda$.
Comme $\Delta < 4$, on peut poser $a = -\dfrac{a_1+1}{2a_2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{4-\Delta}}{2a_2}$.
Le calcul précédent montre qu'alors $P(a+ib) = a - ib$ et $P(a-ib) = a + ib$.
Si on pose $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$, la question III.A.3 montre que $P(A) = {}^tA$.
Comme $b \neq 0$, $\pi_A = \chi_A$ est de degré 3 et donc $P = P_A$.

D'où l'existence de A.