Corrigé Centrale PSI 2003 Maths 1

1 Polynômes de Hilbert

A- Inversion d'une matrice

- 1. $T_n(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$, donc le terme d'indice (i,j) de M_n est égal à $\binom{j}{i}$ pour $i \leq j$, et 0 pour i > j, i et j variant de 0 à n.
- 2. M_n est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux valent 1, donc son déterminant vaut 1 et elle est inversible. $T_n^{-1}(P) = P(X-1)$, d'où $T_n^{-1}(X^j) = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} {j \choose i} X^i$, donc le terme d'indice (i,j) de M_n^{-1} est égal à $(-1)^{j-i} {j \choose i}$ pour $i \leq j$, et 0 pour i > j, i et j variant de 0 à n.

B- Propriétés de la suite (H_i)

1. H_i étant de degré i, la famille $(H_i)_{0 \le i \le n}$ est échelonnée en degrés, elle forme donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2.
$$0 \le j \le i - 1 \implies H_i(j) = 0$$

$$j \ge i \implies H_i(j) = \binom{j}{i}$$

$$j < 0 \implies H_i(j) = (-1)^i \binom{-j+i-1}{i}.$$

C- Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

1. Pour
$$0 \leqslant k \leqslant n$$
, $P(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(k) = \sum_{i=0}^{k} a_i \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^{n} ({}^t M_n)_{ki}.a_i$ soit $\binom{P(0)}{\vdots}_{P(n)} = {}^t M_n. \binom{a_0}{\vdots}_{a_n}$.

2.
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^tM_n^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$
, d'où $a_i = \sum_{j=0}^n ({}^tM_n^{-1})_{ij} \cdot P(j) = \sum_{j=0}^n (M_n^{-1})_{ji} \cdot P(j) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} {i \choose j} P(j)$.

Soit $i \ge n+1$. On se place dans $\mathbb{C}_i[X]$, i.e on remplace l'entier n par l'entier i.

On applique ce qui précède à $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. La composante de P suivant H_i est nulle, donc $0 = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j)$.

3. $a \Rightarrow b$: La question C.2 donne le résultat.

 $b\Rightarrow c$: La question B.2 montre que $H_i(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$, or $P=\sum_{i=0}^n a_iH_i$, d'où $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.

 $c \Rightarrow a$: évident

D- Description des suites de la forme $(P(j))_{j\in\mathbb{N}}$ où P est un polynome

$$a \Rightarrow b$$
: Pour $i \geqslant n+1$, $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j = \sum_{i=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) = 0$ d'après C2.

$$b \Rightarrow a$$
: On pose pour $i \in [0, n]$, $a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j$, puis $P = \sum_{j=0}^{n} a_j H_j$.

$${}^t\!M_n^{-1}\begin{pmatrix}P(0)\\\vdots\\P(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}={}^t\!M_n^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\\vdots\\u_n\end{pmatrix},\,\mathrm{donc}\;P(j)=u_j\;\mathrm{pour}\;0\leqslant j\leqslant n.$$

2 Quelques propriétés des séries entières

A- Représentation intégrale de $f(\omega)$ à partir des valeurs de f sur C_r

- 1. $f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t}$. $|f_n(t)| = |a_n|r^n$ terms général d'une série convergente, donc $(\sum f_n)$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$, d'où en intervertissant somme et intégrale : $\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n 2\pi \delta_{n,p} = 2\pi a_p r^p$.
- 2. On pose $g_p(t) = \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p f(re^{it})$. On a $|f(re^{it})| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, donc $|g_p(t)| \leq M \left| \left(\frac{|\omega|}{r}\right)^p \right|$ et $\left| \frac{\omega}{re^{it}} \right| = \frac{|\omega|}{r} < 1$ donc la série de fonctions $(\sum g_p)$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$, or $\frac{re^{it}}{re^{it} \omega} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p$, d'où en intervertissant somme et intégrale : $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} \omega} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\omega^p}{2\pi r^p} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p = f(\omega).$

B- Principe du maximum

1. La série entière $(\sum a_n z^n)$ étant normalement convergente sur tout disque fermé inclus dans D_R , f est continue sur D_R . Le cercle C_r est un compact inclus dans D_R , donc |f| est bornée sur C_r et y atteint son maximum.

$$2. \ \text{D'après A.2, } |f(\omega)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{|re^{it} - \omega|} M_f(r) \frac{dt}{2\pi} \leqslant \frac{r M_f(r)}{r - |\omega|} \ \text{car} \ |re^{it} - \omega| \geqslant r - |\omega| > 0.$$

3. E_R est stable par produit (produit de Cauchy de 2 séries entières) donc par récurrence, f^p appartient à E_R . D'autre part, $M_{f^p}(r) = (M_f(r))^p$. En appliquant à f^p la question précédente, on obtient :

$$|f(\omega)|^p \leqslant \frac{r}{r - |\omega|} |M_f(r)|^p$$
, d'où $|f(\omega)| \leqslant \left(\frac{r}{r - |\omega|}\right)^{1/p} |M_f(r)|$.

Pour p tendant vers $+\infty$, on obtient $|f(\omega)| \leq M_f(r)$.

C- Division de $f(z) - f(\omega)$ par $z - \omega$ pour $f \in E_R$

- 1. $|a_n\omega^{n-1-j}| = \frac{1}{|\omega|^{j+1}}|a_n\omega^n|$ qui est le terme général d'une série convergente, d'où l'absolue convergence de la série proposée. car $\omega \in D_R$.
- 2. Puisque $|\omega| < r$, on a $|b_j r^j| \le \sum_{n=j+1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=j+1}^{\infty} |a_n| r^n \to 0$ en tant que reste de série convergente. A fortiori $b_j = \mathcal{O}(\frac{1}{r^j})$.

2

3. Soit $z \in D_R$. On choisit r dans les deux intervalles $]|\omega|, R[\text{ et }]|z|, R[\text{. Dés lors}, |b_j z^j| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^j\right)$, donc la série converge, et le rayon de convergence de $(\sum b_j z^j)$ est supérieur ou égal à R.

On pose
$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$
. $(z - \omega)g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{j-1} z^{j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} \omega b_j z^j = -\omega z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{j-1} - \omega b_j) z^j$.

Or
$$b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega^{n-1} = \frac{f(\omega) - f(0)}{\omega}$$
, et $b_{j-1} - \omega b_j = \sum_{n=j}^{\infty} a_n \omega^{n-j} - \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n \omega^{n-j}$ d'où

$$(z - \omega)g(z) = -f(\omega) + f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j = f(z) - f(\omega).$$

D- Minoration de $M_f(r)$ à l'aide des zéros de f

l'égalité demandée.

1. En appliquant la question C.3 à f au point z_1 , on obtient une fonction g_1 appartenant à E_R telle que $\forall z \in D_R$, $f(z) = (z - z_1)g_1(z)$.

En répétant l'opération successivement à chaque fonction g_j ainsi définie et pour chaque z_{j+1} , on construit une fonction G dans E_R telle que $\forall z \in D_R$, G(z). $\prod_{j=1}^p (z-z_j) = f(z)$ puis en multipliant G par la fonction polynome $z \mapsto \prod_{j=1}^p (r^2 - \overline{z_j}z)$, on obtient une fonction F appartenant à E_R vérifiant

2.
$$z\overline{z} = r^2 \operatorname{donc} \left| \frac{r^2 - \overline{z_j}z}{z - z_j} \right| = \left| \frac{z_j - \frac{r^2}{\overline{z}}}{z - z_j} \right| . |z| = r. \left| \frac{z_j - z}{z - z_j} \right| = r.$$

3. D'après D.1 et D.2, pour $z \in C_r \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$, $|F(z)| = |f(z)|r^p$, ceci s'étend en chaque point z_j par continuité de F et f, d'où $M_F(r) = M_f(r).r^p$.

D'après B3,
$$|F(0)| \leq M_F(r)$$
, soit $\frac{\left|f(0)r^{2p}\right|}{\left|\prod\limits_{j=1}^{p}(-z_j)\right|} \leq M_f(r)r^p$, d'où $M_f(r)$. $\left|\prod\limits_{j=1}^{p}z_j\right| \geqslant |f(0)|r^p$.

4. On applique la question précédente à la fonction $g: z \mapsto \frac{f(z)}{z^k}$. Elle vérifie les hypothèses de la partie D, d'où $M_g(r)$. $\left|\prod_{j=1}^p z_j\right| \geqslant |g(0)|r^p$. Or $g(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ et $M_g(r) = \frac{M_f(r)}{r^k}$, soit :

$$M_f(r). \left| \prod_{j=1}^p z^j \right| \geqslant \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k}.$$

E- Etude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb N$

Si f est non nulle, on note k le plus petit indice tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ ($k \geqslant 1$ car f(0) = 0). On choisit r = p, $z_j = j$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$, qui sont bien des racines de f appartenant à $\overline{D}_p \setminus \{0\}$. En appliquant D4, on obtient donc $M_f(p)p! \geqslant |a_k|p^{p+k}$. Par hypothèse, $\exists A > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $M_f(p) \leqslant A.c^p$, soit $|a_k| \leqslant \frac{Ap!}{p^k p^p} c^p \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{A}{p^k} \left(\frac{c}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$ d'après Stirling. En faisant tendre p vers $+\infty$, on en déduit que $a_k = 0$, ce qui est contradictoire. Finalement, f = 0.

3 Théorème de Pólya

A- Majoration de
$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f(k)\right|$$

1.
$$F_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{X-k}$$
 avec $\alpha_k = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$.

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! \ f(re^{it})}{(re^{it} - 1) \cdots (re^{it} - n)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{re^{it} - k} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k).$$

3. D'après A.2,
$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! \ M_f(r)}{(r-1) \cdots (r-n)} \frac{dt}{2\pi} = \frac{n! \ M_f(r)}{(r-1) \cdots (r-n)}.$$

B- Preuve du théorème

1. En appliquant A3 à r = 2n + 1, il vient:

$$\varepsilon_n \stackrel{def}{=} \left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leqslant \frac{n!}{n(n+1)\cdots(n+n)} o\left(\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n}}\right) \stackrel{Stirling}{=} o\left(\frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2 2^{2n+1}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \sqrt{n}}\right) = o(1).$$

 (ε_n) est une suite d'entiers (hypothèse a) de limite nulle, donc elle est stationnaire à la valeur 0 à partir d'un certain rang N.

2. On applique la question I.D à la suite $u_k = f(k)$: $\exists P \in \mathbb{C}_{N-1}[X], \forall k \in \mathbb{N}, \ f(k) = P(k)$. Il en résulte que la fonction f - P est entière, nulle sur \mathbb{N} et $M_{f-P}(r) = o\left(\frac{2^r}{\sqrt{r}}\right) = o(2^r)$, or 2 < e, donc en utilisant la question II.E, on en déduit que f - P = 0, et f est polynomiale.