Centrale 2002 — PSI, 2e épreuve — corrigé

1 Matrices tridiagonales

Question 1 Méthode du pivot

1 Le système $\mathcal{S}_2$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Le premier pivot choisit est $p_0 = 2$, on réalise l'opération : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ obtenant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - \beta_1/2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

On choisit comme second pivot $p_1 = 7/2$, on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{7}L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{7}L_2$, obtenant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2/7 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7}\beta_1 - \frac{2}{7}\beta_2 \\ \beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1 \\ \frac{1}{7}\beta_1 - \frac{2}{7}\beta_2 + \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Le dernier pivot choisi est $p_2 = 12/7$, on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{6}L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{12}L_3$, obtenant le système diagonal :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{6}\beta_3 \\ -\frac{7}{12}\beta_1 + \frac{7}{6}\beta_2 - \frac{7}{12}\beta_3 \\ \frac{1}{7}\beta_1 - \frac{2}{7}\beta_2 + \beta_3 \end{pmatrix}.$$

On résout : $x_1 = \frac{7}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{1}{12}\beta_3$; $x_2 = -\frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{1}{6}\beta_3$; $x_3 = \frac{1}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{7}{12}\beta_3$.

2.a On suppose dans cette question, ce qui est sous-entendu par l'énoncé, que dans le déroulement de l'algorithme, on ne tombe jamais sur un pivot nul.
On obtient par exemple le programme Maple suivant : `initialise` effectue les initialisations des tableaux globaux `a` et `b` ; `transforme` effectue la transformation d'une ligne connaissant l'indice du pivot ; `diagonalise` effectue tous les calculs de pivot nécessaires ; `resolution` renvoie la valeur des solutions.

```
> initialise :=
>    proc (n)
>    local i,j;
>    global a,b;
>      a := array(1..n+1,1..n+1);
>      b := array(1..n+1);
>      for i from 1 to n+1 do
>         for j from 1 to n+1 do a[i,j] := 0 od;
>         a[i,i] := 4;
>         b[i] := `beta`.i
>      od;
>      for i from 1 to n do a[i,i+1]:=1; a[i+1,i]:=1 od;
>      a[1,1] := 2; a[n+1,n+1] := 2
> end:

> transforme := proc(ipivot,i,n)
>    local j,k;
>    global a,b;
>    k := a[i,ipivot]/a[ipivot,ipivot];
>    b[i] := b[i] - k*b[ipivot];
>    for j from 1 to n+1 do a[i,j] := a[i,j] - k*a[ipivot,j] od
> end:
```

```
> diagonalise := proc(n)
>    local i,j;
>    global a,b;
>    for i from 1 to n+1 do
>       for j from 1 to n+1 do
>         if j <> i then transforme(i,j,n) fi
>       od
>    od
> end :

> resolution := proc(n)
>    local i;
>    global a,b;
>    for i from 1 to n+1 do
>       b[i] := b[i] / a[i,i]
>    od;
>    evalm(b)
> end:

> initialise(2):diagonalise(2):resolution(2);
   [7/12 beta1 - 1/6 beta2 + 1/12 beta3,
   1/3 beta2 - 1/6 beta1 - 1/6 beta3,
   7/12 beta3 - 1/6 beta2 + 1/12 beta1]
```

2.b On a bien $p_0 = 2$.
Lorsqu'on choisit un pivot en ligne i, on fait apparaître des zéros dans la colonne i en-dessous et au-dessus, et on modifie également les colonnes précédentes et seulement la colonne $i+1$ parmi les suivantes. Autrement dit, après les calculs correspondants au pivot d'indice i, les colonnes d'indices $i+2$ ou plus ne sont pas modifiées.
C'est ainsi que le futur pivot d'indices (i,i) n'est pas modifié tant qu'on opère sur les pivots d'indices au plus égal à $i-2$: c'est lors des calculs afférents au pivot d'indice $i-1$ qu'on modifie pour la première fois le terme d'indices (i,i).
Par conséquent, après qu'on a choisi le pivot p_k (d'indices $(k+1,k+1)$), on modifie le terme d'indices $(k+2,k+2)$ (qui valait encore 4) et on le remplace par $4-1/p_k$ puisque le 1 d'indices $(k+1,k+2)$ n'a pas été encore modifié. C'est dire que le prochain pivot vaudra effectivement $p_{k+1} = 4 - 1/p_k$.
Bien entendu, à la fin, on a $p_n = 2 - 1/p_{n-1}$ car le terme d'indices $(n+1,n+1)$ vaut 4 jusqu'aux opérations effectuées depuis le pivot p_{n-1} d'indices (n,n).

2.c Soit $f : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$. f croît sur $]0,+\infty[$ et transforme $I = [2, 2+\sqrt{3}]$ en $f(I) = [\frac{7}{2}, 2+\sqrt{3}] \subset I$. Sur cet intervalle, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1/4$, donc f est contractante. On peut en conclure que la suite (u_n) a tous ses termes dans I et converge vers l'unique point fixe $2+\sqrt{3}$ de f sur I.

2.d Aucun des pivots n'est nul (comme on l'espérait en écrivant le programme), donc A_{n+1} est inversible.

Question 2 Calculs explicites

3.a On a bien sûr $c_1 = 4$, $c_2 = 15$. En développant, pour $n \geqslant 3$, c_n suivant la première ligne, on obtient : $c_n = 4c_{n-1} - c_{n-2}$. On invente un c_0 fictif, $c_0 = 1$, de sorte que la suite (c_n) vérifie

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 4, \quad \forall n \geqslant 0, c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n.$$

On résout classiquement cette récurrence.
Le polynôme caractéristique de la récurrence est $X^2 - 4X + 1 = (X - 2 - \sqrt{3})(X - 2 + \sqrt{3})$, de sorte qu'il existe deux constantes α et β telles que $\forall n, c_n = \alpha(2-\sqrt{3})^n + \beta(2+\sqrt{3})^n$. Imposant $c_0 = 1$ et $c_1 = 4$, j'obtiens : $\forall n, c_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$.
Développant suivant la première ligne, on a également, pour $n \geqslant 3$: $b_n = 2c_{n-1} - c_{n-2}$ donc finalement $b_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$, formule valable d'ailleurs pour tout n.

De même, développant suivant la dernière ligne : $a_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$ donc finalement, pour $n \geqslant 2$:

$$a_n = \sqrt{3}\,\frac{(2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1}}{2}.$$

3.b On retrouve bien que A_n est toujours inversible.

3.c Les matrices $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ont pour polynômes caractéristiques respectifs $\chi_{A_3} = X^3 - 8X^2 + 18X - 12$ et $\chi_{C_3} = X^3 - 12X^2 + 46X - 56$.
Leurs spectres sont donc $\mathrm{Sp}(A_3) = \{2, 3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\}$ et $\mathrm{Sp}(C_3) = \{4, 4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\}$.

Question 3 Localisation des valeurs propres

3.a On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une colonne X non nulle telle que $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]X = 0$. Notons i un indice tel que $0 < |x_i| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
Si $i = 1$: on lit la première ligne du produit : $(\alpha_1 - \lambda)x_1 = -x_2$ donc $|\alpha_1 - \lambda| = |x_2/x_1| \leqslant 1$ ce qui contredit les hypothèses.
Si $i = n$: on lit la dernière ligne :$(\alpha_n - \lambda)x_n = -x_{n-1}$ donc $|\alpha_n - \lambda| = |x_{n-1}/x_n| \leqslant 1$ ce qui contredit les hypothèses.
Sinon, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, on lit la ligne i : $(\alpha_i - \lambda)x_i = -x_{i-1} - xi - 2$ donc $|\alpha_i - \lambda| = \left|\frac{x_{i-1}+x_{i-2}}{x_i}\right| \leqslant 2$ ce qui contredit les hypothèses.
La preuve par l'absurde a bien été achevée.

3.b $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ étant symétrique, on sait qu'elle possède n valeurs propres réelles (pas forcément distinctes).
Si λ est valeur propre de $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, c'est donc qu'au moins une des hypothèses précédentes n'est pas réalisées, ce qui se traduit exactement en disant que λ appartient à la réunion d'intervalles proposée par l'énoncé.
Comme $0 \notin [2-1, 2+1] \cup [4-1, 4+1] \cup [4-2, 4+2]$, A_n, B_n et C_n n'admettent pas 0 comme valeur propre et sont donc inversibles.

2 Fonctions splines cubiques

Question 1 Un isomorphisme

D'après la formule de Taylor pour un polynôme P de degré au plus 3 sur $[a, b]$: $P = P(a) + (X-a)P'(a) + \dfrac{(X-a)^2}{2}P''(a) + \dfrac{(X-a)^3}{6}P'''(a)$, l'application (évidemment linéaire) :

$$\left(\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(a), P'(a), P''(a), P'''(a)) \end{array}\right.$$

est un isomophisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Notons Φ : $\left(\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+3} \\ s & \longmapsto & (s(0), s'(0), s''(0), s_d^{(3)}(0), s_d^{(3)}(1/n), \ldots, s_d^{(3)}((n-1)/n)) \end{array}\right.$ il s'agit bien évidemment d'une application linéaire. On va montrer qu'elle est bijective, donc un isomorphisme, et on en déduira aussitôt que $\dim S = n+3$.
Il suffit de montrer qu'à un $(n+3)$-uplet ω de réels correspond une et une seule application $s \in S$ telle que $\Phi(s) = \omega$.
Il existe un unique polynôme P_0 de degré au plus égal à 3 tel que $P_0(0)$, $P_0'(0)$, $P_0''(0)$ et $P_0'''(0)$ soient les quatre premières valeurs de ω : il s'agit de l'unique restriction autorisée de s à $[0, 1/n]$.

Supposons, par récurrence, qu'on ait montré, pour $k \leqslant n-1$, l'existence et l'unicité des restrictions de s aux intervalles $[0,1/n]$, $[1/n,2/n]$, …, $[(k-1)/n,k/n]$, restrictions qu'on notera P_0, …, P_{k-1}.
Comme s doit être de classe $\mathcal{C}^2$, on impose au polynôme P_k restriction de s à $[k/n,(k+1)/n]$ les valeurs $P_k(k/n) = P_{k-1}(k/n)$, $P_k'(k/n) = P_{k-1}'(k/n)$, $P_k''(k/n) = P_{k-1}''(k/n)$ et $P_k'''(k/n)$ est fixé égal à la composante d'indice $(k+4)$ de ω. Il y a bien existence et unicité de P_k.

Question 2 Une autre détermination des splines cubiques

2.a Remarquons que la condition (ii) imposera à g d'être continue.
Montrons l'unicité de la forme de la restriction P_i de g à l'intervalle $[x_{i-1},x_i]$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour cela, nous déterminons deux réels u_i et v_i tels que $P_i = \dfrac{m_{i-1}}{6h}(x_i - X)^3 + \dfrac{m_i}{6h}(X - x_{i-1})^3 + u_i(X - x_{i-1}) + v_i$.
On vérifie que $P_i''(x_{i-1}) = m_{i-1}$ et $P_i''(x_i) = m_i$ de sorte que la condition (iii) est automatiquement vérifiée.
La condition (ii) se traduit par : $m_i\dfrac{h^2}{6} + u_i h + v_i = f(x_i)$ et $m_{i-1}\dfrac{h^2}{6} + v_i = f(x_{i-1})$. On résout, et on obtient :

$$u_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{h}{6}(m_i - m_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad v_i = f(x_{i-1}) - \frac{h^2}{6}m_{i-1}.$$

Dans ces conditions, on vérifie que

$$g_d'(x_{i-1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{h}{6}(m_i + 2m_{i-1}) \quad \text{et} \quad g_g'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{6}(m_{i-1} + 2m_i).$$

2.b Le système requis est équivalent à $f'(0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \dfrac{h}{6}(m_1 + 2m_0)$, $f'(1) = \dfrac{f(1) - f(x_{n-1})}{h} + \dfrac{h}{6}(m_{n-1} + 2m_n)$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{6}(m_{i-1} + 2m_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{6}(m_{i+1} + 2m_i).$$

Ceci se réécrit effectivement $A_{n+1}M = B$ où B est la matrice (β_i) avec :

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= 6\,\frac{f(x_1) - f(0) - hf'(0)}{h^2}; \\
\beta_i &= 6\,\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}, \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1; \\
\beta_n &= -6\,\frac{f(1) - f(x_{n-1}) - hf'(1)}{h^2}.
\end{aligned}$$

2.c On vient de trouver l'unique spline cubique solution, puisque le système linéaire obtenu n'a qu'une solution, A_{n+1} étant inversible.

2.d Autrement dit, la fonction $\left(\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+3} \\ s & \longmapsto & (s'(0), s'(1), s(x_0), \ldots, s(x_n)) \end{array}\right.$ qui est évidemment linéaire, est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et on retrouve $\dim S = n+3$.

Question 3 Interpolation de Lagrange-Sylvester

3.a Soit L le polynôme de Lagrange (unique) de degré au plus égal à n qui coïncide avec f aux points (x_i) : rappelons que $L = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.
Pour chercher le polynôme h, il suffit de chercher $H = h - L$ qui est un polynôme de degré au plus égal à $n+2$ devant s'annuler en chaque x_i et vérifier $H'(0) = f'(0) - L'(0)$ et $H'(1) = f'(1) - L'(1)$.

H est nécessairement de la forme $H = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i) \times Q(X)$ où Q est un polynôme de degré au plus 1.

Il y a exactement une solution.

En effet on impose $Q(0) = (f'(0) - L'(0)) \ / \ \prod_{i=1}^{n}(-x_i)$ et $Q(1) = (f'(1) - L'(1)) \ / \ \prod_{i=0}^{n-1}(1 - x_i)$, ce qui détermine Q de façon unique.

3.b Pour le cas $n = 1$.
La spline cubique g s'écrit ici :

$$g(x) = \Big(2(f(0) - f(1)) + f'(0) + f'(1)\Big)x^3 + \Big(3(f(1) - f(0)) - 2(f'(0) + f'(1))\Big)x^2 + f'(0)x + f(0)$$

et coïncide avec le polynôme de Lagrange-Sylvester h.

Pour le cas $n \geqslant 2$. Pour calculer la spline cubique g, on commence par construire la matrice colonne B, ce qui coûte $O(n)$ opérations, puis on résout le système $A_{n+1}M = B$ par la méthode du pivot, ce qui coûte $O(n^3)$ opérations, et on applique enfin les formules de calculs des u_i et des v_i, ce qui coûte encore $O(n)$ opérations. Au total, on effectue donc $O(n^3)$ opérations pour déterminer g.
Pour le polynôme de Lagrange-Sylvester, il faut d'abord évaluer le polynôme de Lagrange et ses dérivées en 0 et 1. Il est difficile d'évaluer le coût de ce calcul sans connaître les règles du jeu : représentation des polynômes, méthode utilisée pour la recherche du polynôme de Lagrange, coût d'un développement...
La précision de la méthode de la spline cubique est, comme l'annonce l'énoncé, un $O(1/n^4)$.
Pour comparer avec la méthode de Lagrange-Sylvester, il suffit d'observer que $\|M_n\|_\infty < 1$ (en réalité, on a beaucoup mieux, puisque cette quantité tend vers 0) et donc que la précision est un $o(1/n!)$ ce qui est évidemment bien meilleur.

3 Un exemple de structure euclidienne

Question 1 Polynômes de Lagrange et produit scalaire

1.a On a affaire à une forme bilinéaire et positive. Vérifions qu'elle est définie : $(P \mid P) = 0$ si et seulement si P s'annule en chaque $i \in \{0, \ldots, n\}$. Or un polynôme de degré au plus n qui admet $n + 1$ zéros distincts est identiquement nul : on a bien un produit scalaire.

1.b Les polynômes L_i sont les polynômes de Lagrange : $L_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - j}{i - j}$.

Comme $(L_k \mid L_\ell) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{ik}\delta_{i\ell} = \delta_{k\ell}$, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est orthonormée, et donc une base orthonormée de E puisqu'elle a le bon cardinal.
$L_0 = \dfrac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=1}^{n}(X - j)$ donc $X^n + (-1)^{n+1}n!L_0 = X^n - \prod_{j=1}^{n}(X - j)$ est de degré $n - 1$: plus précisément, son monôme dominant est $(1 + 2 + \cdots + n)X^{n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2}X^{n-1}$.

1.c Plus généralement, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on dispose de $X^n + (-1)^{n-k+1}k!(n-k)!L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
L'orthogonal dans E de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est une droite vectorielle.
Si N est sur cette droite, donc orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on aura $(N \mid L_k) = (-1)^{n-k}\dfrac{(N \mid X^n)}{k!(n-k)!}$.

Donc, nécessairement un tel vecteur vérifie $N = (N \mid X^n)\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}L_k$.

Dans la suite, nous choisirons le vecteur $N = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} L_k$.
On vérifie aisément que pour tout polynôme $P \in E$, pour toute constante λ et tout polynôme $Q \in H$, on dispose de $d(\lambda P, H) = |\lambda|\, d(P, H)$ et $d(P - Q, H) = d(P, H)$.
En particulier, puisque $X^n + (-1)^{n+1} n! L_0 \in H$, $d(X^n, H) = d((-1)^n n! L_0, H) = n!\, d(L_0, H)$.

1.d Le coefficient de X^n dans $(1 + X)^{2n}$ vaut $\binom{2n}{n}$. Mais, considérant $(1 + X)^n (1 + X)^n$, on trouve qu'il vaut aussi : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \binom{n}{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$. On a montré : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$.

1.e Alors $d(X^n, H) = n!\, d(L_0, H) = \|L_0 - p_H(L_0)\|_2$ où j'ai noté p_H la projection orthogonale sur H. Or pour tout vecteur x, $x - p_H(x)$ est le projeté orthogonal de x sur la droite engendrée par N donc finalement :
$d(X^n, H) = n! \left\| \frac{(L_0 \mid N)}{(N \mid N)} N \right\|_2 = n! \frac{1}{\|N\|_2} = \frac{n!}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}} = \frac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}$.

Question 2 Étude d'un endomorphisme de E

2.a Un reste dans la division euclidienne par Π est un polynôme de degré au plus égal à $\deg \Pi - 1 = n$, donc $\varphi(E) \subset E$.
En outre l'unicité du couple quotient-reste assure de la linéarité de φ.

2.b On écrit que Π divise $L_i M_0 - \varphi(L_i)$. Or L_i divise Π, donc L_i divise $\varphi(L_i)$. Comme $\deg \varphi(L_i) \leqslant n = \deg L_i$, c'est qu'il existe un scalaire k_i tel que $\varphi(L_i) = k_i L_i$.
Simplifiant par L_i, il vient alors que $(X - i)$ doit diviser $M_0 - k_i$, et donc que $k_i = M_0(i)$.
Finalement : $\varphi(L_i) = M_0(i) L_i$.
$\mathcal{B}$ est donc une base orthonormée de diagonalisation de φ, qui est donc autoadjoint.

2.c φ sera un endomorphisme orthogonal si et seulement si toutes ses valeurs propres valent ± 1. La condition cherchée est donc : $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, M_0(i) \in \{-1, +1\}$.
Sous cette condition, φ n'est autre qu'une symétrie orthogonale, par rapport à $\mathrm{Vect}\{L_i, M_0(i) = +1\}$.

2.d Écrivant dans la base $\mathcal{B}$ un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} x_i$, $\|P\|_2^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2$.
Alors $\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} M_0(i) x_i L_i$ et donc $(\varphi(P) \mid P) = \sum_{i=0}^{n} M_0(i) x_i^2$.
Soit $M = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} M_0(i)$ et i_M un indice tel que $M = M_0(i_M)$. Soit de même $m = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} M_0(i)$ et i_m un indice tel que $m = M_0(i_m)$.
On dispose clairement pour tout indice i de $m x_i^2 \leqslant M_0(i) x_i^2 \leqslant M x_i^2$, donc $m \|P\|_2^2 \leqslant (\varphi(P) \mid P) \leqslant M \|P\|_2$.
En outre les bornes sont atteintes pour $P = L_{i_m}$ et $P = L_{i_M}$ respectivement.
On en déduit :

$$\min_{P \in \mathcal{B}_E(0,1)} (\varphi(P) \mid P) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \geqslant 0\,; \\ m, & \text{si } m < 0\,; \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max_{P \in \mathcal{B}_E(0,1)} (\varphi(P) \mid P) = \begin{cases} M, & \text{si } M \geqslant 0\,; \\ 0, & \text{si } M < 0. \end{cases}$$