Centrale 2002 PSI — épreuve 1 — corrigé

PARTIE
Résultats préliminaires

Question 1
Comme $\mathrm{Vect}(h)$ est de dimension finie, le résultat est acquis. D'ailleurs, on sait que l'orthogonal d'un sous-espace est toujours en somme directe avec lui, et on dispose, pour tout $f \in \mathcal{C}$, de $p_h(f) = \dfrac{\langle f \mid h\rangle}{\langle h \mid h\rangle} h$ (projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(h)$) et $f = p_h(f) + (f - p_h(f)) \in \mathrm{Vect}(h) \oplus \mathrm{Vect}(h)^{\perp}$. Alors Π_h n'est autre que $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} - p_h$.
L'inclusion $\mathrm{Vect}(h) \subset \left(\mathrm{Vect}(h)^{\perp}\right)^{\perp}$ est évidente.
Inversement, décomposant alors (de façon unique) un élément f de $\left(\mathrm{Vect}(h)^{\perp}\right)^{\perp}$ sous la forme $f = p_h(f) + g$ où $g = f - p_h(f) \perp h$, on aura $0 = \langle f \mid g\rangle = \langle g \mid g\rangle$ donc $g = 0$ et $f = p_h(f) \in \mathrm{Vect}(h)$.

Question 2
L'application est bien définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$, et est clairement linéaire.
Pour $\xi \in \mathcal{A}$, on dispose de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\langle \xi'' \mid u\rangle = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\xi''(t)\,dt = [(1-t)\xi'(t)]_0^1 + \int_0^1 \xi'(t)\,dt = [(1-t)\xi'(t) + \xi(t)]_0^1 = 0$ donc l'application est bien à valeurs dans $\mathcal{H}$.
Si $\xi \in \mathcal{A}$ est d'image nulle : $\xi'' = 0$ alors ξ' est constante sur $[0,1]$, et s'annule en 0, donc ξ est constante sur $[0,1]$, et s'annule en 0, donc finalement : $\xi = 0$, et l'application considérée est injective.
Si $z \in \mathcal{H}$, vérifions que $\xi : t \mapsto \displaystyle\int_0^t (t-s)z(s)\,ds$ est bien dans $\mathcal{A}$ et d'image égale à z.
En effet : $(t,s) \mapsto (t-s)z(s)$ est continue sur $[0,1] \times [0.1]$ et y admet une dérivée partielle par rapport à t : $(t,s) \mapsto z(s)$, elle-même continue sur le même espace produit. On sait que dans ces conditions ξ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, de dérivée : $\xi' : t \mapsto \displaystyle\int_0^t z(s)\,ds + (t-t)z(t) = \int_0^t z(s)\,ds$. Comme z est continue sur $[0,1]$, ξ est finalement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et $\xi'' = z$ comme espéré. En outre, on a trouvé au passage que $\xi(0) = \xi'(0) = 0$.
Enfin $\xi(1) = \displaystyle\int_0^1 (1-s)z(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle u \mid z\rangle = 0$: ξ est bien dans $\mathcal{A}$.

PARTIE I
Comportement asymptotique de racines d'équations

Question I.1
On dispose de $\langle e_k \mid e_\ell\rangle = 2\displaystyle\int_0^1 \cos\omega_k t \cos\omega_\ell t\,dt = \int_0^1 \big(\cos(\omega_k+\omega_\ell)t + \cos(\omega_k-\omega_\ell)t\big)\,dt$, et donc, si $k = \ell$, on a bien $\langle e_k \mid e_k\rangle = 1 + \displaystyle\int_0^1 \cos(2k+1)\pi t\,dt = 1$; et si $k \neq \ell$: $\langle e_k \mid e_\ell\rangle = \left[\dfrac{\sin(\omega_k+\omega_\ell)t}{\omega_k+\omega_\ell} + \dfrac{\sin(\omega_k-\omega_\ell)t}{\omega_k-\omega_\ell}\right]_0^1 = 0$.
La famille est bien orthonormale.

Question I.2
I.2.a. L'axe des ordonnées, le point de coordonnées $(1,0)$, et leur translatés par des multiples entiers du vecteur $(4,0)$ sont évidemment des éléments de symétrie du graphe considéré.
$\tilde{f}$ est évidemment continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, mais comme $\lim\limits_{0^-} \tilde{f} = f(0) = \lim\limits_{0^+} \tilde{f}$ et que $\lim\limits_{2^-} \tilde{f} = -f(0) = \lim\limits_{2^+} \tilde{f}$, il y a continuité aux points d'abscisses $2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en $+1$ (et donc, par parité, en -1), c'est-à-dire si et seulement si $f(1) = 0$.
I.2.b. Par parité, tous les $b_n(\tilde{f})$ sont nuls.
On a, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2k+1}(\tilde{f}) &= \int_0^2 \tilde{f}(t)\cos\omega_k t\,dt = \int_0^1 f(t)\cos\omega_k t\,dt - \int_1^2 f(2-t)\cos\omega_k t\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\cos\omega_k t\,dt - \int_0^1 f(u)\cos((2k+1)\pi - \omega_k u)\,du = 2\int_0^1 f(t)\cos\omega_k t\,dt = \sqrt{2}\langle f \mid e_k\rangle. \end{aligned}$$

De façon analogue, $a_{2k}(\tilde{f}) = \displaystyle\int_0^2 \tilde{f}(t)\cos k\pi t\,dt = \int_0^1 f(t)\cos k\pi t\,dt - \int_0^1 f(u)\cos(2k\pi - k\pi u)\,du = 0$.

I.2.c. $\tilde f$ étant au moins 4-périodique et continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique.
Notons $\|\tilde f\|_4^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 \tilde f^2$, et S_{2n+1} la somme de Fourier à l'ordre $2n+1$ de $\tilde f$: $S_{2n+1}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(\tilde f)\cos\omega_k t$.

On en déduit en particulier ici : $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle f \mid e_k\rangle e_k$.

Tenant compte de la question précédente, Parseval affirme que $\|\tilde f\|_4^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}^2(\tilde f)$ et $\displaystyle\lim_{n\infty}\|\tilde f - S_{2n+1}\|_4 = 0$.

Or ici on a : $a_{2k+1}(\tilde f) = \sqrt{2}\langle f \mid e_k\rangle$, et, pour toute fonction φ continue par morceaux, 4-périodique et telle que $\varphi(t) = -\varphi(2-t)$ pour $t \in\,]1,2[$, ce qui est le cas de $\tilde f$ mais aussi de S_{2n+1}, on a aussi : $\|\varphi\|_4^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 \varphi^2 = \int_0^1 \varphi^2$.

Finalement on peut effectivement écrire que $\|f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\langle e_k \mid f\rangle^2$ et que $\displaystyle\lim_{n\infty}\left\| f - \sum_{k=0} n\langle f \mid e_k\rangle e_k\right\|_2 = 0$.

I.2.d. On a vu que si en plus f vérifiait $f(1) = 0$, on avait continuité de $\tilde f$ sur $\mathbb{R}$ entier. En outre, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, $\tilde f$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Dans ces conditions, le théorème de Dirichlet s'applique pour $\tilde f$, et, par restriction sur $[0,1]$, on en déduit l'égalité demandée. Comme $\tilde f$ est continue, on sait qu'on a la convergence uniforme espérée.

I.2.e. Dans le cas où $f(t) = \sqrt{3}(1-t)$, on obtient $\langle f \mid e_k\rangle = \dfrac{\sqrt{6}}{\omega_k^2}$. Dirichlet en $t = 0$ fournit alors $\sqrt{3} = \sqrt{6}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\omega_k^2}$,

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}$.

Considérant le cas où $f(t) = \sin\omega(t-1)$, où $\omega \in \Omega$, on obtient cette fois $\langle f \mid e_k\rangle = -\sqrt{2}\dfrac{\omega\cos\omega}{\omega_k^2 - \omega^2}$.
Dirichlet (toujours en $t = 0$), après division par $-\cos\omega$ (qui n'est pas nul), fournit effectivement la relation demandée : $\tan\omega = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2\omega}{\omega_k^2 - \omega^2}$.

I.2.f. Pour $\omega \in \Omega$, on écrit : $\varphi(\omega) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\omega}\tan\omega = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega_k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2}$. Les deux séries écrites étant convergentes, leur différence aussi, et $\varphi(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)}$.

Question I.3

I.3.a. On observe que si $0 \leqslant k < n$, $\displaystyle\lim_{\omega_k^+}\varphi_n = +\infty$ et si $0 < k \leqslant n$, $\displaystyle\lim_{\omega_k^-}\varphi_n = -\infty$. En outre on vérifie aisément que φ_n est la somme de fonctions toutes strictement décroissantes sur chaque intervalle $]\omega_k, \omega_{k+1}[$. On en déduit l'existence et l'unicité des racines demandées.

I.3.b. Si $\omega_0 < \omega < \omega_1$, on dispose de $\varphi_{n+1}(\omega) - \varphi_n(\omega) = \dfrac{\omega^2}{\omega_{n+1}^2(\omega^2 - \omega_{n+1}^2)} < 0$. Donc $\varphi_{n+1}(\mu_n) < 0$, et comme φ_{n+1} décroît sur $]\omega_0, \omega_1[$, on a bien $\mu_{n+1} < \mu_n$. La suite (μ_n) décroît et reste dans l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$, donc converge vers une limite $\mu \in [\omega_0, \omega_1[$.

I.3.c. La convergence simple est acquise (et même sur Ω). Pour $n \geqslant 2$ et $t \in\,]\omega_0, \omega_1[$, on dispose de $|\varphi(\omega) - \varphi_n(\omega)| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\omega_1^2}{\omega_k^2(\omega_k^2 - \omega_1^2)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k$, où $\alpha_k \sim \dfrac{\omega_1^2}{\omega_k^4}$ est le terme général (ne dépendant pas de ω) d'une série convergente. C'est dire qu'on a bien la convergence uniforme de $\varphi - \varphi_n$ sur $]\omega_0, \omega_1[$ (vers la fonction nulle, on le sait depuis le I.2.f).
Sur $I = \,]\omega_0, \omega_1[\, = \,]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}[$, on vérifie aisément que φ décroît de $+\infty$ à $-\infty$, et n'admet qu'une racine dans l'intervalle considéré.
Soit alors $\varepsilon > 0$. D'après la convergence uniforme établie plus haut, il existe un entier N tel qu'en particulier $n \geqslant N \Rightarrow |\varphi(\mu_n) - \varphi_n(\mu_n)| = |\varphi(\mu_n)| \leqslant \displaystyle\sup_{t\in I}|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \varepsilon$: bref, la suite $(\varphi(\mu_n))$ converge de limite nulle.
$\mu = \lim \mu_n = \omega_0$ est exclu puisque $\displaystyle\lim_{\omega_0}\varphi = +\infty$, donc $\mu \in I$, où φ est continue, et donc $\varphi(\mu) = 0$. μ est bien l'unique solution sur I de l'équation $\omega = \tan\omega$. En réalité, une étude rapide montre que $\mu \in J = [\pi, 3\pi/2[$.

Sur l'intervalle $J = [\pi, \dfrac{3\pi}{2}[$, l'équation est équivalente à $\omega = \pi + \arctan \omega$. Or $\psi : t \mapsto \pi + \arctan t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\psi(J) \subset J$, et, sur J, $|\psi'(t)| \leqslant k = \dfrac{1}{1+\pi^2}$.
Le théorème du point fixe assure que la suite définie par $u_0 = \pi$ et $u_{n+1} = \pi + \arctan u_n$ converge vers μ, et qu'on a la majoration, valable pour tout n : $|u_n - \mu| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0| \leqslant \dfrac{1}{2\pi(1+\pi^2)^{n-1}} < 1{,}6.10^{-n}$.
On répondra à la question posée en choisissant comme approximation de μ la valeur $u_7 \approx 4{,}493409$.

PARTIE II
Estimation de la vitesse en moyenne quadratique

Question II.1

II.1.a. On a évidemment $y(1) = 0$. Comme z est continue sur $[0, 1]$, $y = T(z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $y'(t) = (1-t)z(t) - \displaystyle\int_0^t z(s)\,ds - (1-t)z(t) = -\int_0^t z(s)\,ds$. On remarque que $y'(0) = 0$.
Finalement, y' est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$, donc y de classe $\mathcal{C}^2$ et $y'' = -z$.

II.1.b. T est clairement linéaire. Si z_1 et z_2 sont dans $\mathcal{C}$,

$$\langle T(z_1) \mid z_2\rangle = \int_0^1 \left((1-t)\int_0^t z_1(s)z_2(t)\,ds + \int_t^1 (1-s)z_1(s)z_2(t)\,ds\right) dt.$$

Le changement de variables $(t, s) \to (s, t)$ transforme la deuxième intégrale de sorte qu'en notant Δ le triangle $\{(t, s) \in [0, 1]^2, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$, on peut écrire :

$$\langle T(z_1) \mid z_2\rangle = \iint_\Delta (1-t)(z_1(s)z_2(t) + z_1(t)z_2(s))\,ds\,dt,$$

expression symétrique en z_1 et z_2. C'est dire que T est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathcal{C}$.

II.1.c. On vérifie que $T(e_k)(t) = \sqrt{2}\left((1-t)\displaystyle\int_0^t \cos\omega_k s\,ds + \int_t^1 (1-s)\cos\omega_k s\,ds\right) = \dfrac{1}{\omega_k^2}e_k(t)$, donc e_k est vecteur propre de T pour la valeur propre $1/\omega_k^2$.
Alors, pour tout $z \in \mathcal{C}$, on a :

$$\|T(z)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k \mid T(z)\rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle T(e_k) \mid z\rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\omega_k^4}\langle e_k \mid z\rangle^2.$$

Or si $k \geqslant 0$, $\omega_k^2 \geqslant \dfrac{\pi^2}{4}$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k \mid z\rangle^2 = \|z\|_2^2$, donc finalement : $\|T(z)\|_2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2}\|z\|_2$.
$T(e_0) = \dfrac{4}{\pi^2}e_0$ et on a égalité quand $z = e_0$.

Question II.2

II.2.a. Notons $V_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u)^\perp \cap V_n = \mathrm{Vect}(u_n)^\perp \cap V_n$, c'est exactement montrer qu'un vecteur de V_n est orthogonal à u si et seulement si il est orthogonal à u_n, et il en est bien ainsi, car si $v \in V_n$, $\langle v \mid u\rangle - \langle v \mid u_n\rangle = \langle v \mid u - u_n\rangle = 0$ car $u - u_n \in V_n^\perp$.
On établit de même que dans les préliminaires que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_k \mid u\rangle e_k$. Notons au passage que u_n est la somme de Fourier à l'ordre $2n + 1$ associée à la fonction u.
Un vecteur $v \in V_n$ de coordonnées $(x_0, \dots, x_n)$ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ est dans $\mathcal{H}_n$ si et seulement si $\langle v \mid u_n\rangle = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_k \mid u\rangle x_k = 0$: $\mathcal{H}_n$ est un hyperplan de V_n, donc un sous-espace de dimension $n + 1 - 1 = n$.

II.2.b. Comme les e_k sont vecteurs propres de T pour des valeurs propres non nulles, l'image de V_n par T est égale à T. Alors $(\Pi_{u_n} \circ T)(\mathcal{H}_n) \subset V_n$ et est contenu dans $\mathrm{Vect}(u_n)^\perp$, par définition de Π_{u_n}. Finalement, $\mathcal{H}_n$ est bien stable par $\Pi_{u_n} \circ T$.
Si z_1 et z_2 sont dans $\mathcal{H}_n$, ils sont orthogonaux à u_n, et on a vu que $\langle T(z_1) \mid z_2\rangle = \langle z_1 \mid T(z_2)\rangle$. Mais pour tout $z \in \mathcal{H}_n$, $T(z) - T_n(z)$ est colinéaire à u_n, donc orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{H}_n$, de sorte que

$$\langle T_n(z_1) \mid z_2\rangle = \langle T(z_1) \mid z_2\rangle = \langle z_1 \mid T(z_2)\rangle = \langle z_1 \mid T_n(z_2)\rangle.$$

T_n est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathcal{H}_n$, qui est de dimension finie, donc T_n diagonalise dans une base orthonormale de $\mathcal{H}_n$.

II.2.c. Nous avions déjà calculé en I.2.e les $\langle u \mid e_k\rangle = \dfrac{\sqrt{6}}{\omega_k^2}$. On en déduit que $u_n = \sqrt{6}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\omega_k^2} e_k$.

Soit $z \in V_n$, de composantes $(x_0, \dots, x_n)$ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$. $T(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{\omega_k^2} e_k$, de sorte que $T(z) - \dfrac{z}{\omega^2} = \dfrac{u_n}{\sqrt{6}}$ si et seulement si, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $x_k\Big(\dfrac{1}{\omega_k^2} - \dfrac{1}{\omega^2}\Big) = \dfrac{1}{\omega_k^2}$.

L'unique vecteur solution est donc $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_k^2} e_k$.

z est dans $\mathcal{H}_n$ si et seulement si $\langle z \mid u_n\rangle = 0$, ce qui ajoute la condition : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)} = 0$, où on reconnaît la condition : $\varphi_n(\omega) = 0$.

Donc, inversement, pour chacune des n solutions ω de φ_n qu'on a trouvées en I.3.a, le vecteur z est orthogonal à u_n (et donc $\Pi_{u_n}(z) = z$) et vérifie $T(z) - \dfrac{z}{\omega^2} = \dfrac{u_n}{\sqrt{6}}$. Projetant par Π_{u_n}, on en déduit que $T_n(z) = \dfrac{z}{\omega^2}$, ce qui établit que ces $\dfrac{1}{\omega^2}$ sont valeurs propres de T_n. On a trouvé n valeurs propres deux à deux distinctes pour un endomorphisme d'un espace de dimension n : on a bien trouvé l'ensemble du spectre de T_n.

II.2.d. On a déjà dit que si $z \in \mathcal{H}_n$, $\langle T(z) \mid z\rangle = \langle T_n(z) \mid z\rangle$.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de z dans une base orthonormée de vecteurs propres de T_n, les coordonnées de $T(z)$ dans la même base sont les $\lambda_k x_k$ (λ_k désigne les valeurs propres).

On en déduit que $\langle T(z) \mid z\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k \langle z \mid z\rangle$.

Or on vient de décrire les valeurs propres de T_n : la plus grande est $1/\mu_n^2$. Remarquons que $1/\mu_n^2 \leqslant 1/\mu^2$.

Question II.3

II.3.a. Il est clair que $z_n \in \mathcal{H}_n$...

On peut écrire $z - z_n = \Pi_{u_n}(z - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle z \mid e_k\rangle e_k)$ car $z \in \mathcal{H}$. On en déduit que $\|z - z_n\|_2 \leqslant \left\| z - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle z \mid e_k\rangle e_k \right\|_2$, qui est de limite nulle quand $n \to +\infty$ d'après I.2.c.

Enfin, T est lispschitzienne sur $\mathcal{C}$ (de rapport au plus égal à $4/\pi^2$) d'après II.1.c. On en déduit aussitôt que $\|T(z) - T(z_n)\|_2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2}\|z - z_n\|_2 \to 0$.

On a dit : $\forall n, \langle z_n \mid T(z_n)\rangle \leqslant \dfrac{1}{\mu^2}\langle z_n \mid z_n\rangle$. Pour conclure, il suffit d'observer que, $\mathcal{C}$ étant muni de la norme $\|\ \|_2$, $\mathcal{S} : (x, y) \mapsto \langle x \mid y\rangle$ est continue sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$: il n'y aura plus alors qu'à passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus pour conclure. Or $\mathcal{S}$ est bien bilinéaire et continue car d'après Cauchy-Schwarz, $|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\|_2\|y\|_2$.

II.3.b. Supposons l'existence d'un tel scalaire C_2.

Soit $n \geqslant 2$. $\dfrac{1}{\mu_n^2}$ est une valeur propre de T_n : il existe donc un vecteur propre non nul associé $w_n \in \mathcal{H}_n$. On a bien sûr $w_n \in \mathcal{H}$ et $\langle T(w_n) \mid w_n\rangle = \langle T_n(w_n) \mid w_n\rangle = \dfrac{1}{\mu_n^2}\langle z_n \mid z_n\rangle \leqslant C_2\langle z_n \mid z_n\rangle$.

On a ainsi prouvé que : $\forall n, C_2 \geqslant \dfrac{1}{\mu_n^2}$, et, passant à la limite, il vient $C_2 \geqslant \dfrac{1}{\mu^2}$ qui est donc la meilleure constante.

Question II.4

Soit $\xi \in \mathcal{A}$, posons $z = \xi'' \in \mathcal{H}$. Évaluons en appliquant la question 2 des préliminaires :

$$\begin{aligned}
\langle \xi' \mid \xi'\rangle &= \int_0^1 \xi'(t)^2\,dt = [\xi(t)\xi'(t)]_0^1 - \int_0^1 \xi(t)z(t)\,dt\\
&= -\int_0^1 z(t)\int_0^t (t-s)z(s)\,ds\,dt = \int_0^1 (1-t)z(t)\int_0^t z(s)\,ds\,dt - \int_0^1 z(t)\int_0^t (1-s)z(s)\,ds\,dt\\
&= \langle z \mid T(z)\rangle - \int_0^1 z(t)\int_0^1 (1-s)z(s)\,ds\,dt = \langle z \mid T(z)\rangle = \langle \xi'' \mid T(\xi'')\rangle.
\end{aligned}$$

En effet : $\displaystyle\int_0^1 (1-s)\xi''(s)\,ds = [(1-s)\xi'(s)]_0^1 + \int_0^1 \xi'(s)\,ds = 0$.

Puisque $\xi'' \in \mathcal{H}$, on a $\langle \xi'' \mid T(\xi'')\rangle \leqslant \dfrac{1}{\mu^2}\|\xi''\|^2$. On a bien établi : $\|\xi'\|_2^2 \leqslant \dfrac{1}{\mu}\|\xi''\|_2$.