CENTRALE 2001
PSI
2ème épreuve

NOTA : par soucis de clarté, les éléments d'une matrice A seront notés par des lettres <u>minuscules</u> : $A = \left(a_{i\,j}\right)$.

Partie I

I. A. 1) Si A est triangulaire supérieure, elle laisse stable le drapeau $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ où V_k est le sous espace engendré par les k premiers vecteurs de base. Si de plus A est inversible, la restriction à chacun des V_k du morphisme correspondant est un automorphisme de V_k et A^{-1} conserve donc aussi le drapeau $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Par suite, A^{-1} est triangulaire supérieure. On obtient le résultat pour une matrice triangulaire inférieure inversible en remarquant que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

I. A. 2) $\mathcal{L}_n$ est un sous-ensemble de $Gl_n(\mathbb{R})$ non vide (il contient l'identité), stable par produit et passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe.

I. B. 1) Soit $A = LU = L'U'$ deux décompositions d'une matrice inversible. Nécessairement, les quatre matrices L, U, L' et U' sont inversibles et $L'^{-1}L = U'U^{-1} \in \mathcal{L}_n \cap \mathcal{U}_n = \{I_n\}$. Autrement dit, $L = L'$ et $U = U'$.

I. B. 2) Si $A = LU$ est inversible, les éléments diagonaux de U sont tous différents de 0. De plus, en décomposant les matrices A, L et U en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, le produit par blocs donne $A_k = L_k U_k$ qui est donc une matrice inversible.

I. B. 3) Avec la décomposition en blocs proposée, $HA = \begin{pmatrix} H_{n-1}A_{n-1} & H_{n-1}V \\ H'A_{n-1} + W & H'V + a_{n\,n} \end{pmatrix}$. La condition imposée est donc équivalente à $H'A_{n-1} + W = 0$, soit $H' = -WA_{n-1}^{-1}$ puisque A_{n-1} est supposée inversible. Si H_{n-1} est une matrice quelconque de $\mathcal{L}_{n-1}$, la matrice $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ -WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice H^{-1} est alors de la forme $\begin{pmatrix} H_{n-1}^{-1} & 0 \\ K' & 1 \end{pmatrix}$; en calculant le produit (par blocs) $HH^{-1} = I_n$, on obtient $K' = WA_{n-1}^{-1}H_{n-1}^{-1}$.

I. B. 4) Si $n = 1$, l'égalité $A = I_n A$ est une décomposition LU.

Admettons le résultat pour une matrice de dimension $n - 1$. Alors, si A est une matrice de taille n telle que $\det(A_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la matrice extraite A_{n-1} admet une décomposition LU, soit $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$. Appliquons la question **I. B. 3)** en choisissant $H_{n-1} = L_{n-1}^{-1}$. On obtient $H^{-1} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_n$ et $HA = \begin{pmatrix} H_{n-1}A_{n-1} & L_{n-1}^{-1}V \\ 0 & WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} + a_{n\,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n-1} & L_{n-1}^{-1}V \\ 0 & WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} + a_{n\,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_n$ ce qui donne une décomposition LU de la matrice A, d'où, par récurrence, le résultat demandé.

Remarquons que, par construction, la matrice U_{n-1} (resp. L_{n-1}) est la matrice extraite formée des n premières lignes et n premières colonnes de U_n (resp. L_n) ce qui est cohérent avec les notations de l'énoncé.

I. C. 1) L'échange des lignes p et q s'obtient en multipliant à gauche par la matrice $E = \left(e_{i\,j}\right)$ définie par $\begin{cases} e_{i\,j} = \delta_{i\,j} & \text{si } i \neq p \text{ et } j \neq q \\ \quad\;\; = \delta_{q\,j} & \text{si } i = p \\ \quad\;\; = \delta_{i\,p} & \text{si } j = q \end{cases}$.

I. C. 2) **a)** Puisque la première ligne de L_n^{-1} est $\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$, la première ligne de $U_n = L_n^{-1}A$ est égale à la première ligne de A.

b) Puisque les éléments diagonaux de la matrice triangulaire U_n^{-1} sont les inverses des éléments diagonaux de U_n , la première colonne de U_n^{-1} est $\begin{pmatrix} 1/a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; la première colonne de $L_n = AU_n^{-1}$ est égale à la première colonne de A divisée par a_{11}.

c) Compte tenu de la remarque terminant la question **I. B. 4)**, si $A = LU$ est la décomposition de A, on obtient la décomposition de A_k sous la forme $A_k = L_k U_k$ (on l'a vu également dans **I. B. 2)**). Par conséquent, $u_{k\,k} = \dfrac{\det(U_k)}{\det(U_{k-1})} = \dfrac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$.

d) Soit i et j deux entiers tels que $2 \le j \le i \le n$ et P la matrice de permutation des lignes i et j. De la décomposition $A = LU$, on tire $PA = (PL)U$ puis on calcule le produit du membre de droite par blocs en s'intéressant uniquement au bloc de PA formé des j premières lignes et colonnes : grâce aux 0 de la matrice U, il est égal au produit des blocs supérieurs gauches.

$$PA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1\,1} & \cdots & a_{j-1\,j-1} & a_{j-1\,j} & \vdots \\ a_{i\,1} & \cdots & a_{i\,j-1} & a_{i\,j} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{j-1\,1} & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ l_{i\,1} & \cdots & l_{i\,j-1} & l_{i\,j} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1\,j-1} & u_{1\,j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{j-1\,j-1} & u_{j-1\,j} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{j\,j} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

On en déduit, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j \\ 1 & \cdots & j-1 & i \end{bmatrix}_A = l_{i\,j}\det(U_j) = l_{i\,j}\det(A_j)\,,\quad \text{d'où } l_{i\,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j \\ 1 & \cdots & j-1 & i \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j \\ 1 & \cdots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}.$$

e) Soit i et j deux entiers tels que $2 \le i \le j \le n$ et P la matrice de permutation des lignes i et j. On effectue le produit par blocs $AP = L(UP)$ en exploitant cette fois les 0 de la dernière "colonne" de L

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & a_{1\,j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,i-1} & a_{i-1\,i} & \vdots \\ a_{i\,1} & \cdots & a_{i\,i-1} & a_{i\,i} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{i-1\,i} & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ l_{i\,i} & \cdots & l_{i\,i-1} & 1 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1\,i-1} & u_{1\,j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{i-1\,i-1} & u_{i-1\,j} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{i\,j} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

puis, en prenant le déterminant des blocs supérieurs gauches :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & j \end{bmatrix}_A = u_{i\,j}\det(U_{i-1}) = u_{i\,j}\det(A_{i-1})\,,\quad \text{d'où } l_{i\,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-2 & i-1 \\ 1 & \cdots & i-2 & i-1 \end{bmatrix}_A}.$$

I. D.

```
LU := proc (A, n)

    local i, j;
    global L, U;

    for i to n
        do      L[i,1] := A[i,1]/A[1,1];
```

```
                L[i,i] := 1;
                for j from i+1 to n
                        do      L[i,j] := 0
                        od
        od;
for i from 3 to n
        do for j from 2 to i-1
                do L[i,j] := det(submatrix(swaprow(A,i,j),1 .. j,1 .. j))/det(submatrix(A,1 .. j,1 .. j)) od
        od;
for j to n
        do      U[1,j] := A[1,j];
                for i from j+1 to n do U[i,j] := 0 od
        od;
for j from 2 to n
        do  U[j,j] := det(submatrix(A,1 .. j,1 .. j))/U[j-1,j-1];
            for i from 2 to j-1
            do   U[i,j] := det(submatrix(swapcol(A,i,j),1 .. i,1 .. i))/det(submatrix(A,1 .. i-1,1 .. i-1))
            od
        od
end;
```

I. E. 1) *Etape a)* première ligne de U : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Etape b) première colonne de L : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Etape c) diagonale de U : $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$.

Etape d) $l_{32} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1 \qquad l_{42} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -2 \qquad l_{43} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = -5$.

Etape e) $u_{23} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2 \qquad u_{24} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 2 \qquad u_{34} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0$.

Finalement, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

La résolution du système $AX = Y$ s'effectue donc en résolvant deux système triangulaires l'un après l'autre : $L\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 1&-1&1&0\\ 2&-3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$, puis $U\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-5&1/4\\ 0&1&2&-1/2\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/2&13/4&-15/4&1/4\\ 0&1/2&-1/2&-1/2\\ 1&-1&1&0\\ 1/2&-3/4&5/4&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$.

I. E. 2) Le produit de deux matrices L et U générales de taille 2 s'écrit $\begin{pmatrix}1&0\\ a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&c\\ 0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&c\\ ab&ac+d\end{pmatrix}$. Donc, si $b = c = 0$, a n'intervient pas dans le produit. En particulier, $\begin{pmatrix}1&0\\ 1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\ 0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\ 2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\ 0&1\end{pmatrix}$ sont deux décompositions LU distinctes de la matrice $\begin{pmatrix}0&0\\ 0&1\end{pmatrix}$.

On voit également que la matrice $\begin{pmatrix}0&0\\ 1&0\end{pmatrix}$ n'a pas de décomposition LU puisque les conditions $b = 0$ et $ab = 1$ sont évidemment incompatibles.

I. E. 3) **a)** En identifiant les termes de degré r dans l'identité polynomiale $(1+X)^{p+q} = (1+X)^p(1+X)^q$ dans laquelle on aura utilisé la formule du binôme, obtient $C_{p+q}^r = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_p^k C_q^{r-k}$.

b) Dans cet exemple, $a_{i\,j} = C_{p+j-1}^{i-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{j-1}^k C_p^{i-1-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_p^{i-1-k} C_{j-1}^k = \sum_{k=1}^n C_p^{i-k} C_{j-1}^{k-1}$, la dernière somme étant obtenue en remplaçant k par k - 1. On reconnaît alors A comme le produit des matrices de terme général C_p^{i-j} et C_{j-1}^{i-1} respectivement, c'est à dire des matrices $L=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ C_p^1&1&0&&0\\ C_p^2&C_p^1&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ C_p^{n-1}&C_p^{n-2}&\cdots&C_p^1&1\end{pmatrix}$ et $U=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\ 0&C_1^1&C_2^1&\cdots&C_{n-1}^1\\ 0&0&C_2^2&\cdots&C_{n-1}^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&C_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}$ ce qui donne la décomposition cherchée et, en prime, det(A) = det(U) = 1.

En particulier, pour $p = 1$ et $n = 4$, l'égalité $A = LU$ s'explicite en

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 1&2&3&4\\ 0&1&3&6\\ 0&0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&0&1&3\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Partie II

II. A. Soit A une matrice symétrique définie positive et $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base orthonormale formée de vecteurs propres de A ; on note $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Si $v=\sum_{i=1}^n v_i e_i$ est un vecteur non nul arbitraire, ${}^t vAv = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 > 0$. Réciproquement, supposons que ${}^t vAv > 0$ pour tout vecteur non nul. Si λ est une valeur propre quelconque de A et si v est un vecteur propre associé, alors ${}^t vAv = \lambda \left\| v^2 \right\| > 0$ ce qui montre que λ est strictement positif.

II. A. 1) Une matrice symétrique A est donc définie positive ssi c'est la matrice d'une forme quadratique définie positive. La restriction de cette forme quadratique au sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique est (dans cette même base) la matrice A_k qui est donc elle aussi définie positive ; en particulier, son déterminant est strictement positif (produit de ses valeurs propres) et on peut donc appliquer **I. B.** pour obtenir l'existence d'une décomposition LU de A.

II. A. 2) Puisque $u_{i\,i} = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})}$, la question précédente prouve que $u_{i\,i} > 0$ pour tout i.

II. B. 1) Ecrivons $L' = L\begin{pmatrix} u_{110} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} 1/u_{110} & 0 & 0 \\ 0 & 1/u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/u_{33} \end{pmatrix} U$. Alors $A = {}^tA = {}^t(L'U') = {}^tU'\,{}^tL'$ est aussi une décomposition LU de A. Par unicité d'une telle décomposition (cf. **I. B. 1**), $L = {}^tU'$ et $U = {}^tL'$, d'où

$$L\begin{pmatrix} \sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} = {}^tU\begin{pmatrix} 1/\sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{u_{33}} \end{pmatrix}.$$

Posons $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} U \in \mathcal{U}_n$; on peut écrire

$$A = L\begin{pmatrix} \sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u_{33}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} U = {}^tBB.$$

II. B. 2) Soient $A = {}^tBB = {}^tB'B'$ deux telles décompositions de A. Alors $BB'^{-1} = {}^tB^{-1}\,{}^tB'$; cette égalité d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure prouve qu'elles sont toutes les deux diagonales. De plus l'égalité du i-ème élément diagonal s'écrit $\dfrac{b_{i\,i}}{b'_{i\,i}} = \dfrac{b'_{i\,i}}{b_{i\,i}}$ ce qui, par l'hypothèse de positivité de $b_{i\,i}$ et de $b'_{i\,i}$, impose que $b'_{i\,i} = b_{i\,i}$ et donc que la matrice diagonale BB'^{-1} est la matrice I_n. Cela prouve l'unicité demandée.

II. C. i) $\Rightarrow$ iii) C'est une conséquence immédiate de ce qui a été dit dans la question **II. A.**.

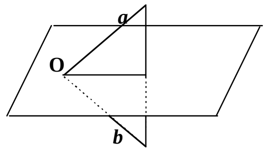
iii) $\Rightarrow$ ii) L'hypothèse permet d'écrire une décomposition LU pour M d'après **I. B. 4)**, soit $M = LU$. Les éléments diagonaux de U étant strictement positifs et la matrice M étant symétrique, l'argument de **II. B. 1)** s'applique sans changement et permet d'écrire $M = {}^tBB$ où B est une matrice inversible.

ii) $\Rightarrow$ i) Si X est un vecteur propre de M associé à une valeur propre quelconque λ de M, ${}^tXMX = \lambda\|X\|^2 = {}^tX\,{}^tBBX = \|BX\|^2$. Comme B est inversible, BX n'est pas le vecteur nul et λ est donc strictement positif.

Partie III

III. A. 1) La matrice $H^{(v)}$ est celle d'une symétrie car $H^{(v)2} = I_n - 2v\,{}^tv + 4v\,{}^tvv\,{}^tv = I_n$ et comme cette matrice est symétrique, il s'agit d'une symétrie orthogonale. Les vecteurs orthogonaux à v sont invariants par $H^{(v)}$ et les vecteurs colinéaires à v sont anti-invariants. Donc $H^{(v)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

III. A. 2) Puisqu'une symétrie orthogonale est une isométrie le vecteur $H^{(v)}(a)$ doit être égal au vecteur $b = (\|a\|, 0, \ldots, 0)$ ou à son opposé. Il est évident géométriquement que pour $v = \dfrac{a-b}{\|a-b\|}$, $H^{(v)}(a) = b$.



III. B. 1) La démonstration se fait par récurrence sur la taille n des matrices. Il n'y a rien à démontrer si n = 1 car dans ce cas, toute matrice est dans $\mathcal{U}_1$. Supposons vrai le résultat pour toute matrice de taille n - 1 et soit A une matrice quelconque de taille n. D'après **III. A.**, il existe une matrice H_1 (de taille n) telle que $H_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$. On peut alors écrire $H_1A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$. On peut alors trouver des matrices de Householder $H'_2, H'_3, \ldots, H'_n$ de taille n - 1 telles que $H'_n H'_{n-1} \ldots H'_2 A' \in \mathcal{U}_{n-1}$. Si on pose $H_i = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & H'_i & \\ 0 & & & \end{array}\right)$, un calcul de produit par blocs montre que $H_nH_{n-1}\ldots H_2H_1A \in \mathcal{U}_n$, ce qui permet de conclure.

III. B. 2) On a vu dans **III. A. 2)** que l'on pouvait choisir comme image du vecteur a par $H^{(v)}$ le vecteur $(\|a\|, 0, \ldots, 0)$. Si l'on fait ce choix pour définir les matrices H_i de la question précédente, $R = H_nH_{n-1}\ldots H_2H_1A \in \mathcal{U}_n^+$. D'autre part, une matrice de Householder est orthogonale et par conséquent, $Q = (H_nH_{n-1}\ldots H_2H_1)^{-1}$ est orthogonale. Donc toute matrice carrée de taille n admet une décomposition QR.

III. B. 3) Si A est inversible, R l'est aussi. Si $A = QR = Q'R'$ sont deux décompositions, on peut écrire $Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$ Or les vecteurs colonnes de la matrice triangulaire $R'R^{-1}$ ne peuvent être orthogonaux et normés que si cette matrice est diagonale et si ses éléments diagonaux valent ± 1. $R'R^{-1} \in \mathcal{U}_n^+$, la seule possibilité est que $R'R^{-1} = I_n$, c'est à dire $R = R'$, d'où $Q = Q'$. La décomposition QR de A est donc unique.

III. C. Notons $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique (orthonormale) de $\boldsymbol{R}^n$ et $\varepsilon_i = Ae_i$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$. Si A est inversible, $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ est une base de $\boldsymbol{R}^n$ que l'on peut orthogonaliser par le procédé de Schmidt (matrice de passage triangulaire supérieure à élément diagonaux égaux à 1) puis normaliser en divisant chaque vecteur obtenu par sa norme (matrice de passage diagonale à élément diagonaux positifs). En appelant $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ la base ainsi obtenue, la matrice de passage de $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ à $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une matrice $\tilde{R} \in \mathcal{U}_n^+$. De plus, la matrice de passage de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une matrice orthogonale Q. On a donc $A\tilde{R} = Q$, d'où $A = Q\tilde{R}^{-1}$ qui est bien une décomposition QR de A.

Partie IV

IV. A. 1) Comme les coefficients de la matrice $M_k N_k$ sont des fonctions polynomiales (donc continues) des coefficients de M_k et N_k, la convergence des suites $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(N_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vers M et N respectivement implique la convergence de la suite $(M_k N_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vers MN.

IV. A. 2) **a)** Il résulte de la définition que pour tout vecteur X non nul, $\left\| M\frac{X}{\|X\|}\right\| \le \|\|M\|\|$, donc que $\|MX\| \le \|\|M\|\|.\|X\|$. Cette inégalité est en outre vérifiée si $X = 0$. Par suite, $\|\|MN\|\| = \sup_{\|X\|\le 1}\|MNX\| \le \sup_{\|X\|\le 1}\|\|M\|\|.\|NX\| \le \|\|M\|\|.\|\|N\|\|$.

b) En particulier, $\|\|M^k\|\| \le \|\|M\|\|^k$. Donc, si $\|\|M\|\| < 1$, la série de terme général $(-1)^k M^k$ est absolument convergente donc convergente de somme S. Or $(I_n + M)\sum_{k=0}^{K}(-1)^k M^k = I_n + (-1)^{K+1} M^{K+1}$. En passant à la limite, ce qui est justifié par **IV. A. 1)**, $(I_n + M)S = I_n$. Enfin, comme $I_n + M$ est une matrice carrée admettant S comme inverse à droite, elle est inversible d'inverse S.

IV. A. 3) Par hypothèse, les valeurs propres de A sont toutes distinctes : A est donc diagonalisable et, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, $A = PDP^{-1}$.

IV. B. Il est immédiat par récurrence que $\det(A_{k+1}) = \det(A_k)$ ce qui garantit que toutes les matrices A_k donc toutes les matrices R_k sont inversibles. L'égalité $A_{k+1} = R_k(Q_k R_k)R_k^{-1}$ montre alors que A_{k+1} est semblable à A_k et par transitivité à A.

IV. C.
$$D^k LD^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k l_{12} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k l_{12} & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^k l_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$ D'où $\lim_{k\to+\infty} D^k LD^{-k} = I_n$.

IV. D. Comme E_k tend vers 0, il en est de même de $RE_k R^{-1}$ et la norme de cette matrice est donc strictement inférieure à 1 à partir d'un certain rang. L'inversibilité de $I_n + RE_k R^{-1}$ (cf. **IV. A. 2) b)**) prouve alors l'unicité d'une décomposition QR que l'on note $I_n + RE_k R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$ et comme $\tilde{R}_k$ est alors inversible, ses éléments diagonaux sont <u>strictement</u> positifs.

IV. E. 1) L'orthogonalité de $\tilde{Q}_k$ est caractérisée par la relation $\tilde{Q}_k\,{}^t\tilde{Q}_k = I_n$. En passant à la limite sur k, on obtient $\tilde{Q}\,{}^t\tilde{Q} = I_n$ ce qui prouve l'orthogonalité de $\tilde{Q}$.

IV. E. 2) Puisque $\tilde{R}_k = {}^t\tilde{Q}_k\left(I_n + RE_k R^{-1}\right)$, $\lim_{k\to+\infty}\tilde{R}_k = {}^t\tilde{Q}$. Par ailleurs, cette limite, que l'on note $\tilde{R}$, est celle d'une suite de matrices de $\mathcal{U}_n^+$ qui est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Donc $\tilde{R} \in \mathcal{U}_n^+$.

IV. E. 3) On a déjà montré en **III. B. 3)** que la seule matrice orthogonale de $\mathcal{U}_n^+$ est I_n. Donc $\tilde{R} = \tilde{Q} = I_n$.

IV. F. En utilisant les décompositions QR et LU de P et P^{-1} respectivement, on peut écrire $A^k = PD^k P^{-1} = QRD^k LU$. Or $I_n + RE_k R^{-1} = RD^k LD^{-k} R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$. On en tire $RD^k L = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k RD^k$ et $A^k = Q\tilde{Q}_k \tilde{R}_k RD^k U$. Remarquons que la matrice $\tilde{R}_k RD^k U$ est dans $\mathcal{U}_n$ mais peut-être pas dans $\mathcal{U}_n^+$. Si

$\sigma_i = \pm 1$ est le signe de son i-ème élément diagonal et $\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$, alors $Q\tilde{Q}_k \Sigma_k$ est une matrice orthogonale et $A^k = \left(Q\tilde{Q}_k \Sigma_k\right)\left(\Sigma_k \tilde{R}_k RD^k U\right)$ est l'unique décomposition QR de A^k.

D'autre part,

$$A^k = \left(Q_1 R_1\right)^k = Q_1\left(R_1 Q_1\right)^{k-1} R_1 = Q_1\left(A_2\right)^{k-1} R_1 = Q_1 Q_2\left(A_3\right)^{k-1} R_2 R_1 = \ldots\ldots = Q_1 Q_2 \ldots Q_k R_k \ldots R_2 R_1 .$$

En identifiant ces deux décompositions QR, on obtient $\begin{cases} Q\tilde{Q}_k \Sigma_k = Q_1 Q_2 \ldots Q_k \\ \Sigma_k \tilde{R}_k RD^k U = R_k \ldots R_2 R_1 \end{cases}$ pour tout k.

Remarquons ensuite que les matrices $\tilde{R}_k$ et R étant dans $\mathcal{U}_n^+$, les signes σ_i ne dépendent que des signes des éléments diagonaux de D^k et de U ; plus précisément, $\sigma_i = \operatorname{sgn}(\lambda_i)^k \operatorname{sgn}(u_{ii})$ et la matrice Σ_k prend alternativement les valeurs Σ_1 et Σ_2 selon la parité de k. La première égalité permet d'écrire $Q\tilde{Q}_k \Sigma_k = Q\tilde{Q}_{k-1}\Sigma_{k-1} Q_k$. En remplaçant k par $2k$, il vient après simplification par Q, $\tilde{Q}_{2k}\Sigma_2 = \tilde{Q}_{2k-1}\Sigma_1 Q_{2k}$ et en passant à la limite sur k, $\lim\limits_{k\to+\infty} Q_{2k} = \Sigma_2\Sigma_1$. De même, en remplaçant k par $2k + 1$, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} Q_{2k+1} = \Sigma_1\Sigma_2$. Comme Σ_1 et Σ_2 commutent, la suite $\left(Q_n\right)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est convergente de limite $\Sigma_1\Sigma_2$.

On tire alors de la deuxième égalité $\Sigma_k \tilde{R}_k RD^k U = R_k \Sigma_{k-1}\tilde{R}_{k-1} RD^{k-1} U$, d'où $\Sigma_k \tilde{R}_k RD = R_k \Sigma_{k-1}\tilde{R}_{k-1} R$. En remplaçant à nouveau k par $2k$, et après multiplication par R^{-1} à droite, il vient $\Sigma_2 \tilde{R}_{2k} RDR^{-1} = R_{2k}\Sigma_1\tilde{R}_{2k-1}$ et en passant à la limite sur k, $\lim\limits_{k\to+\infty} R_{2k} = \Sigma_2 RDR^{-1}\Sigma_1$. De même, en remplaçant k par $2k + 1$, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} R_{2k+1} = \Sigma_1 RDR^{-1}\Sigma_2$.

En regroupant ces résultats, $\lim\limits_{k\to+\infty} A_{2k} = \Sigma_1 RDR^{-1}\Sigma_1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} A_{2k+1} = \Sigma_2 RDR^{-1}\Sigma_2$. Comme la matrice R est triangulaire supérieure, la matrice RDR^{-1} l'est aussi de même que $\Sigma_1 RDR^{-1}\Sigma_1$ et $\Sigma_1 RDR^{-1}\Sigma_1$. De plus, les éléments diagonaux de RDR^{-1} sont les valeurs propres λ_i de A ; comme la multiplication à gauche et à droite par Σ_1 revient à changer le signe de certaines lignes puis des colonnes de même indice, cette opération ne modifie pas les éléments diagonaux qui restent égaux aux λ_i , et il en est évidemment de même avec Σ_2 . Les deux sous-suites $\left(\left(A_{2k}\right)_{ij}\right)_{k\in\boldsymbol{N}}$ et $\left(\left(A_{2k+1}\right)_{ij}\right)_{k\in\boldsymbol{N}}$ ayant même limite pourvu que $j \le i$, les suites $\left(\left(A_k\right)_{ij}\right)_{k\in\boldsymbol{N}}$ sont convergentes, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(A_k\right)_{ii} = \lambda_i$ si $1 \le i \le n$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(A_k\right)_{ij} = 0$ si $1 \le j < i \le n$.