CENTRALE I - PSI 2001

PARTIE I

I.A. vérification facile

I.B.1) $f = \Pi_\Phi^n(f) + (f - \Pi_\Phi^n(f))$ avec $f - \Pi_\Phi^n(f)$ orthogonal à $\Pi_\Phi^n(f)$. $d_\Phi^n(f)$ n'est autre que $\| f - \Pi_\Phi^n(f) \|$. On applique le théorème de Pythagore.

I.B.2) $\| \Pi_\Phi^n(f) \| \leq \| f \|$ d'après la question précédente, avec égalité si f est élément de V_Φ^n. La borne supérieure demandée est donc égale à 1.

I.B.3) $\Pi_\Phi^n(f) = \sum_{j=0}^{n} (f \,|\Phi_j)\ \Phi_j$ lorsque la famille (Φ_j) est orthonormale, ce qui est le cas ici. Donc

$\| \Pi_\Phi^n(f) \|^2$ est égal à $\sum_{j=0}^{n} (f\,|\Phi_j)^2$. D'où $\sum_{j=0}^{n} (f\,|\Phi_j)^2 \leq \| f \|^2$, puis $\sum_{j=0}^{\infty} (f\,|\Phi_j)^2 \leq \| f \|^2$.

I.C.1) a) il suffit de prendre n supérieur à k puisqu'alors f_k est élément de V_Φ^n et donc $\Pi_\Phi^n(f_k) = f_k$.

b) toujours pour n supérieur à k, on aura
$$\| f - \Pi_\Phi^n(f) \| \leq \| f - f_k \| + \| \Pi_\Phi^n(f - f_k) \| \leq 2\| f - f_k \|$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe k tel que $\| f - f_k \| < \frac{\varepsilon}{2}$, et pour $n \geq k$, $\| f - \Pi_\Phi^n(f) \| < \varepsilon$

I.C.2) i) $\Rightarrow$ ii) résulte directement de ce qui précède

ii) $\Rightarrow$ i) : $(\Pi_\Phi^n(f))$ est une suite de V_Φ convergeant vers f

I.C.3) Puisque $\| f - \Pi_\Phi^n(f) \|$ tend vers 0, il en est a fortiori de même pour $\| f \| - \| \Pi_\Phi^n(f) \|$. Donc :

$$\| f \|^2 = \lim_{n\to+\infty} \| \Pi_\Phi^n(f) \|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (f\,|\Phi_j)^2$$

$$d_\Phi^n(f)^2 = \| f \|^2 - \| \Pi_\Phi^n(f) \|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} (f\,|\Phi_j)^2$$

I.D.1) Prendre $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pour x élément de $[-1,0]$, puis l'étendre à $\mathbb{R}$ par périodicité. Vérifier que $\tilde{f}$ est continue en 1 aux points entiers.

I.D.2) Pour une fonction continue 2π-périodique, les sommes partielles de sa série de Fourier convergent en moyenne quadratique vers cette fonction. Si a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction h, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jt) \right|^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \left| \tilde{f}(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx\pi) \right|^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} \left| \tilde{f}(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx\pi) \right|^2 dt = 0$$

donc la famille C est totale.

I.D.3) Il suffit d'enlever la constante 1 à la famille C. Aucune suite (u_n) engendrée par la nouvelle famille ne peut converger vers 1 puisque 1 est orthogonale à cette nouvelle famille :

$$1 = u_n + 1 - u_n$$

$$\Rightarrow \quad (1 \mid 1) = (1 \mid 1 - u_n)$$

Si (u_n) convergeait vers 1, on aurait aussi $(1 \mid 1 - u_n)$ de limite nulle (Cauchy-Schwartz) et donc $(1 \mid 1) = 0$ ce qui n'est pas le cas.

PARTIE II

II.A.1) pas de pb pour montrer que Lip(I,$\mathbb{R}$) est un sous-espace vectoriel de C^0(I,$\mathbb{R}$). Ce n'est pas une sous-algèbre (sauf si I est compact, cf question suivante). L'application $x \to x^2$ n'est pas lipschitzienne bien que carré de la fonction lipschitzienne $x \to x$.

II.A.2) $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)|$

$\leq M\,(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|)$ en prenant M un majorant de $|f|$ et $|g|$ (qui existe car f et g sont continues, donc bornées sur un intervalle compact).

$\leq 2MK\,|x - y|$ où K est le plus grand des constantes de Lipschitz de f et g

$\sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur [0,1]

II.B) **<u>ERREUR D'ENONCE</u> : Il faut lire : montrer que *f*** (et non $f\,'$) **est lipschitzienne sur I.** On peut supposer qu'un candidat doté de bon sens aura rectifié de lui-même, la question étant quasiment du cours.

Si f est lipschitzienne de rapport k, alors $|f\,'(x)| = \lim_{y\to x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$

Réciproquement, si $f\,'$ est bornée, l'inégalité des accroissements finis permet de conclure.

La constante de Lipschitz ne sera autre que $\sup_{x \in I} |f\,'(x)|$.

II.C) $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K\,|x - y|$ avec K majorant les k_n, et on passe à la limite.

II.D.1) Si g(1) – g(0) = δ (avec $|\delta| \leq 1$), prendre sur $[n,n+1]$ $g(x - n) + n\delta$. Il est facile de vérifier que $\overline{g}(x)$ est continue. Pour montrer qu'elle est lipschitzienne, supposons $x < y$. Si x et y sont dans le même intervalle $[n,n+1]$, c'est clair. Si $n \leq x \leq n+1 \leq m \leq y \leq m+1$, on a :

$$|\overline{g}(x) - \overline{g}(y)| = |\overline{g}(x) - \overline{g}(n+1)| + |\overline{g}(n+1) - \overline{g}(m)| + |\overline{g}(m) - \overline{g}(y)|$$

$$\leq n + 1 - x + (m - n - 1)|\delta| + y - m \leq n + 1 - x + m - n - 1 + y - m \leq y - x$$

II.D.2) $g_n'(x) = n(\overline{g}(x + \frac{1}{n}) - \overline{g}(x))$ bornée par 1

$$\left|g_n(x) - \overline{g}(x)\right| = \left|n \int_x^{x+1/n} \overline{g}(t) - \overline{g}(x)\, \mathrm{d}t\right| \le n \int_x^{x+1/n} \left|\overline{g}(t) - \overline{g}(x)\right| \mathrm{d}t$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{t\in[x,x+1/n]} \left|\overline{g}(t) - \overline{g}(x)\right| \le \frac{1}{n}$$

II.E.1) $(f \mid C_n) = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos(n\pi t)\, \mathrm{d}t = -\dfrac{\sqrt{2}}{n\pi} \int_0^1 f\,'(t) \sin(n\pi t)\, \mathrm{d}t = -\dfrac{1}{n\pi} (f\,' \mid S_{n-1})$

II.E.2) D'après I.B.3) la série de terme général $(f\,'|S_{n-1})^2$ converge et est majorée par $\| f\,' \|^2$. Donc la série de terme général $n^2(f \mid C_n)^2$ converge et est majorée par $\dfrac{1}{\pi^2} \| f\,' \|^2$.

II.F.1) Quitte à diviser f par $k(f)$, on peut supposer $k(f) = 1$. f est limite uniforme d'une suite (f_m) de fonction de classe C^1 à dérivée bornée par 1. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (f_m \mid C_n)^2 \le \frac{1}{\pi^2}$$

A fortiori, pour tout p, $\sum\limits_{n=1}^{p} n^2 (f_m \mid C_n)^2 \le \dfrac{1}{\pi^2}$. Or la convergence étant uniforme, on a, pour tout n,

$\lim\limits_{m\to+\infty} (f_m \mid C_n) = (f \mid C_n)$ car $\left|(f_m \mid C_n) - (f \mid C_n)\right| \le \| f_m - f \|\, \| C_n \| \le N_\infty(f_m - f)\, \| C_n \|$

Il en résulte que, en faisant tendre m vers ∞, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{p} n^2 (f \mid C_n)^2 \le \dfrac{1}{\pi^2}$. Cette majoration étant vraie pour tout p, et la série étant à termes positifs, on $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 (f \mid C_n)^2 \le \dfrac{1}{\pi^2}$.

II.F.2) $d_C^{n-1}(f)^2 = \sum\limits_{j=n}^{\infty} (f \mid C_j)^2$ (cf I.C.3),

$$\Rightarrow \qquad n^2 d_C^{n-1}(f)^2 = n^2 \sum_{j=n}^{\infty} (f \mid C_j)^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} j^2 (f \mid C_j)^2 \le \frac{k(f)^2}{\pi^2} \text{ d'où le résultat}$$

PARTIE III

III.A) $d_\Phi^{n-1}(\Psi_j)^2 = \| \Psi_j \|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\Psi_j \mid \Phi_k)^2$ d'après I.B.1 et I.B.3

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j \mid \Phi_k)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{j=0}^{m} d_\Phi^{n-1}(\Psi_j)^2 = m + 1 - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j \mid \Phi_k)^2$$

et il suffit de montrer que $n \geq \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j \mid \Phi_k)^2$ ou que $1 \geq \sum_{j=0}^{m} (\Psi_j \mid \Phi_k)^2$ or cette relation est vraie puisque $\sum_{j=0}^{m} (\Psi_j \mid \Phi_k)^2 \leq \| \Phi_k \|^2 = 1$.

La deuxième inégalité s'obtient en prenant $m = 2n-1$.

III.B.1) **<u>AUTRE ERREUR D'ENONCE</u>** : On parle de Φ orthonormale puis ensuite de Ψ. Faudrait savoir !!

Il suffit de montrer que $k(\Psi_j) \geq \pi n d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)$ et d'utiliser l'inégalité montrée précédemment. Or cette inégalité est vraie en prenant $\Phi = C$ (cf II.F.2)

III.B.2) Si la suite $(k(\Psi_j))$ était bornée par M, on aurait, pour tout n, $2n\text{M} \geq \pi^2 n^3$ ce qui n'est pas le cas.

III.B.3) Si la suite $k(\Psi_j)$ ne tendait pas vers l'infini, il existerait une sous-suite bornée. Mais cette sous-suite est également orthonormale, ce qui contredirait le III.B.2)

III.B.4) $k(\text{C}_n) = \sqrt{2}\, n\pi$ valeur maximale de la dérivée.

III.B.5) La suite étant croissante, on a :

$$\pi^2 n^3 \leq \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \leq 2n\, k(\Psi_{2n-1})^2$$

$$\Rightarrow \quad k(\Psi_{2n-1}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, n \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,(2n-1)$$

$$\Rightarrow \quad k(\Psi_{2n}) \geq k(\Psi_{2n-1}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, 2n$$

Dans tous les cas, $k(\Psi_n) \geq \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\, n$

PARTIE IV

IV.A) Les $(\text{L}_n(2x-1))$ sont orthogonaux. Il suffit de les normer. Or :

$$(\text{Q}_n \mid \text{Q}_n) = \alpha_n^2 \int_0^1 \text{L}_n(2x-1)^2\, dx = \frac{\alpha_n^2}{4^n\, n!^2} \int_0^1 \text{P}_n(2x-1)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\alpha_n^2}{4^n\, n!^2} \int_{-1}^1 \text{P}_n(t)^2\, dt = \frac{\alpha_n^2}{2n+1} \text{ donc } \alpha_n = \sqrt{2n+1}$$

IV.B.1) $d_{\text{Q}}^{n}(f)^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} (f \mid \text{Q}_k)^2$ d'après I.B.1 et I.B.3 est clairement décroissant.

IV.B.2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\text{N}_\infty(f - \text{P}) < \varepsilon$ (la norme uniforme étant prise sur [0,1]). Pour n supérieur à deg(P), P appartient à V_{Q}^{n}. Comme $d_{\text{Q}}^{n}(f) \leq \| f - \text{P} \| \leq \text{N}_\infty(f - \text{P}) < \varepsilon$, on a bien $d_{\text{Q}}^{n}(f)$ de limite nulle en $+\infty$.

Cela signifie que $\Pi_{\text{Q}}^{n}(f)$ converge vers f. Q est donc totale d'après I.C.2).

IV.B.3) $\Phi_n = \pm\, Q_n$ par récurrence sur n. En effet, $\Phi_0 = \pm\, 1 = \pm\, Q_0$. Pour passer au rang $n+1$, on utilise le fait que Φ_{n+1} appartient à la droite orthogonale à l'hyperplan $(\Phi_0, ..., \Phi_n)$ dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. L'hypothèse de récurrence entraîne que Q_{n+1} est élément de cette droite, donc Φ_{n+1} et Q_{n+1} sont colinéaires.
IV.C) $U_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$. Appliquer Leibniz.
IV.D.1) On développe $\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\, e^{i\theta}\right)^n$ et $\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\, e^{-i\theta}\right)^n$, puis on fait le produit des deux développement. Les termes possédant une puissance de $e^{i\theta}$ donneront une intégrale nulle.
Les termes constants en θ seuls auront une contribution, et ces termes valent précisément $\frac{1}{2^n\, n!}$ fois l'expression de P_n du IV.C. C'est donc bien L_n
IV.D.2) $L_n(x)$ est bornée par 1 puisque $\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right| \leq 1$. Les extrema sont atteints en $\pm\, 1$.
IV.E.1) On dérive $n+1$ fois la relation $(x^2-1)U_n' = 2nxU_n$, on obtient :

$$(x^2-1)\, U_n^{(n+2)} + 2(n+1)xU_n^{(n+1)} + (n+1)(n+2)U_n^{(n)} = 2nxU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$$

ce qui donne :

$$(x^2-1)\, P_n'' + 2(n+1)xP_n' + (n+1)nP_n = 2nxP_n' + 2n(n+1)P_n$$

d'où le résultat.
IV.E.2) $L_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[(x^2-1)U_n]$

$$\Rightarrow \qquad L_{n+1}' = \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}[(x^2-1)U_n]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\left[(x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}U_n + 2(n+2)x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}U_n + (n+2)(n+1)\frac{d^n}{dx^n}U_n\right]$$

alors que $xL_n' = \frac{x}{2^n\, n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}U_n$. Donc :

$$L_{n+1}' - xL_n' = \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\left[(x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}U_n + 2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}U_n + (n+2)(n+1)\frac{d^n}{dx^n}U_n\right]$$

L'égalité de cette expression avec $(n+1)L_n$ équivaut à :

$$\frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}\left[(x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}U_n + 2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}U_n + (n+2)(n+1)\frac{d^n}{dx^n}U_n\right] = \frac{(n+1)}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}U_n$$

$$\Leftrightarrow \qquad (x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}U_n + 2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}U_n + (n+2)(n+1)\frac{d^n}{dx^n}U_n = 2(n+1)^2\frac{d^n}{dx^n}U_n$$

$$\Leftrightarrow \qquad (x^2-1)\, P_n'' + 2x\, P_n' - n(n+1)\, P_n = 0$$ ce qui est bien vérifié.
IV.F) On sait que L_n est maximal en 1 et vaut 1. Par récurrence, L_n' aussi avec la relation :

$$L_{n+1}'(1) = L_n'(1) + n + 1 \text{ et } L_0' = 0$$

d'où $\qquad L_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$

$k(Q_n)$ est égal au maximum de la valeur absolue de la dérivée de Q_n soit :

$$Q_n'(1) = 2\alpha_n L_n'(1) = \sqrt{2n+1}\; n(n+1)$$