Corrigé Centrale 2000 - (Maths I - PSI)

François Jaboeuf - PSI* - Joffre-MONTPELLIER

21 avril 2001

PARTIE I

I.A) Question I.A) :

On reconnaît le lemme de Lebesgue dont la démonstration est ici simplifiée car f est C^1 : une intégration par parties donne la conclusion cherchée :
$\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = [f(t)(\frac{-\cos(xt}{x})]_a^b + \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt = \frac{1}{x}\Big(f(a)\cos(ax) - f(b)\cos(bx) + \int_a^b f'(t)\cos(xt)\,dt\Big)$.
L'expression en facteur de $\frac{1}{x}$ dans le dernier membre est visiblement bornée par rapport à x . D'où le résultat :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0}$$

I.B) Question I.B) :

I.B).1

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et même continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$ $(\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\sin(nt) \underset{t\to 0}{\sim} nt)$. Ceci assure l'existence de l'intégrale "ordinaire" J_n.

I.B).2

On a clairement $\boxed{J_0 = 0;\ J_1 = \frac{\pi}{2};\ J_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt = 2}$.
Puis la formule trigonométrique : $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$ conduit à :
$J_3 = 3\frac{\pi}{2} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\,dt = 3\frac{\pi}{2} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(2t))\,dt$ et finalement $\boxed{J_3 = \frac{\pi}{2}}$.

I.B).3

De $\sin(nt) - \sin((n-2)t) = 2\cos((n-1)t)\sin(t)$, on tire pour $n \geq 2$:

$$\boxed{J_n - J_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((n-1)t)\,dt = \frac{2}{n-1}\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}$$

En considérant la parité de n on obtient : $\begin{cases} J_n - J_{n-2} = 0 & \text{si n est impair} \\ J_n - J_{n-2} = \frac{2}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si n est pair}\end{cases}$. Puis par récurrence immédiate :

$$\boxed{\begin{cases} J_n = \frac{\pi}{2} & \text{si n est impair} \\ J_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2}{2k-1}(-1)^{k-1} & \text{si n est pair et non nul}\end{cases}}$$

I.B).4

De $\sin(nt) - \sin((n-1)t) = 2\cos((n-\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})$, on tire pour $n \geq 1$: $J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((n-\frac{1}{2})t)\frac{1}{\cos(\frac{t}{2})}\,dt$. Et comme la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(\frac{t}{2})}$ est C^1 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, le lemme de Lebesgue de la question I.A s'applique (la démonstration de I.A est analogue en remplaçant $\sin(xt)$ par $\cos(xt)$ ou bien le changement de variable $t = \pi - u$ dans la dernière intégrale remplace $\cos((n-\frac{1}{2})t)$ par $(-1)^{n+1}\sin((n-\frac{1}{2})u)$. En substituant à la variable x la suite $(x_n = n-\frac{1}{2})$ de limite $+\infty$ on a la limite cherchée : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0}$.

D'où, puisque la suite (J_{2n-1}) est constante $(=\frac{\pi}{2})$, $\lim_{n\to+\infty}(J_{2n} = \frac{\pi}{2})$ et compte tenu des résultats du I.B.3), après glissement de l'indice k de 1, on retrouve la formule demandée (habituellement déduite du développement en série entière de la fonction Atan) :

$$\boxed{4\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi}$$

I.C) Question I.C) :

I.C).1

la fonction $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue en tout point non multiple de π et continue par morceaux sur $[0,a]$ puisque si $k\pi$ est l'un des multiples (en nombre fini) de π dans l'intervalle $[0,a]$, $\lim_{t\to k\pi}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = (-1)^{(n-1)k}n$
$(\sin(u+k\pi) \underset{u\to 0}{\sim} (-1)^k u$ et $\sin(n(u+k\pi)) \underset{u\to 0}{\sim} (-1)^{nk}nu)$. Ceci assure l'existence de l'intégrale "ordinaire" demandée.

I.C).2

On sait déja que f est C^∞ sur $]0,a]$ comme fraction en x et sin(x) dont le dénominateur ne s'annulle pas. Le problème à résoudre est donc le prolongement C^∞ en 0. Sachant que l'on a les développements en série entière : $\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ et $\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}$. Le numérateur $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ est donc prolongeable par 0 en 0 et ce prolongement, développable en série entière est C^∞ sur $\mathbb{R}$; de même le dénominateur $\frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement (par 1 en 0) qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Finalement comme on a posé $f(0) = 0$, f coïncide sur l'intervalle $[0,a]$ avec le quotient des deux prolongements C^∞ dont le dénominateur ne s'annulle pas, ni en 0 (il vaut 1), ni sur l'intervalle $]0,a]$ où il vaut $\frac{\sin(x)}{x}$) et f est bien C^∞ sur $[0,a]$.

I.C).3

Chacune des deux intégrales existant d'après I.C.1), on peut écrire :
$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = \int_0^a \sin(nt)f(t)\,dt$ où f est la fonction de la question précédente. Comme f est C^∞ sur $[0,a]$, le lemme de Lebesgue de la question I.A. donne : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt\right) = 0}$.

I.C).4

1er Cas : a=$\frac{\pi}{2}$ D'après I.B.4 et I.C.3. $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$.

2ème Cas : $0 < a < \frac{\pi}{2}$ Par la relation de Chasles : $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$
et compte tenu du 1er cas et de I.A (la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est C^1 sur l'intervalle $[a,\frac{\pi}{2}]$), on obtient la même limite : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$.

3ème Cas : $a > \frac{\pi}{2}$ De même $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$ et compte tenu du 1er cas et de I.A (la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est C^1 sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2},a]$), on obtient la même limite : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$.

I.D) Question I.D) :

$F(n\pi) = \int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin(nu)}{u}\,du$ (par le changement de variable affine $t = nu$) et d'après I.C.4), $\lim_{n\to+\infty}F(n\pi) = \frac{\pi}{2}$. Pour $x \to +\infty$, soit $n = E(\frac{x}{\pi}) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ (car $n > \frac{x}{\pi} - 1$) de telle sorte que par la relation de Chasles : $F(x) = F(n\pi) + \int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{t}\,dt = 0$ puisqu'on a la majoration
$|\int_{n\pi}^x \frac{\sin t}{t}\,dt| \leq \int_{n\pi}^x |\frac{\sin t}{t}|\,dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\frac{\sin t}{t}|\,dt \leq \frac{1}{n\pi}$ (car $|\frac{\sin t}{t}| \leq \frac{1}{n\pi}$ sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$).
D'où la limite cherchée : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x) = \frac{\pi}{2}}$.

I.E) Question I.E) :

L'application $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est C^0 par morceaux sur $[0, +\infty[$; elle est intégrable sur cet intervalle si, et seulement si, $t \mapsto |\frac{\sin t}{t}|$ l'est, c'est-à-dire, si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ existe. Or par la relation de Chasles on peut écrire : $\int_0^{n\pi} |\frac{\sin t}{t}|\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}|\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\, du$ (par les changements de variable affines : $t = u+k\pi$ et positivité de $\frac{\sin u}{u+k\pi}$ sur $[0, \pi]$). Mais la série de terme général positif $\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\, du$ est divergente puisqu'on a la minoration : $\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\, du \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin u\, du = \frac{2}{(k+1)\pi}$. D'où la conclusion demandée :

$\boxed{t \mapsto \dfrac{\sin t}{t} \text{ n'est pas intégrable sur }]0, +\infty[}$.

PARTIE II

II.A) Question II.A) :

L'application $t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ est C^0 par morceaux sur $[0, +\infty[$ (cf. I.C.) ; elle est intégrable sur cet intervalle car dominée, quand $t \to +\infty$, par $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ avec $n \geq 2$.

II.B) Question II.B) :

Intégrons I_2 par parties après nous être assurés que la partie intégrée est bien convergente :
$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2}\, dt = \left[\frac{-1}{t}(\sin t)^2\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\, dt$, et $\left[\frac{-1}{t}(\sin t)^2\right]_0^{+\infty} = 0$ puisque $\frac{-1}{t}(\sin t)^2 \underset{t\to 0}{\sim} -t$ et $\frac{-1}{t}(\sin t)^2 = \underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{t})$. Puis par le changement de variable affine $t = \frac{u}{2}$, on obtient : $\boxed{I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = I_1}$.

II.C) Question II.C) :

Sur $[0, \pi]$, sin est strictement concave donc son graphe est strictement en dessous de la tangente en 0 (y=t) pour $\pi \geq t > 0$ et pour $t > \pi$ on a clairement $|\sin t| \leq 1 < \pi < t$. Et compte-tenu de la parité du sinus : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{\sin t}{t}| < 1$. La suite de fonctions $\left(t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\right)_{n\geq 2}$, C^0 et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dominée par la fonction $\varphi \ : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } 1 < t \end{cases}$ qui est visiblement C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n = 0$ et le théorème de convergence dominée s'applique : on peut permuter l'intégrale et la limite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

II.D) Question II.D) :

Par stricte positivité des intégrales des fonctions continues, on a clairement $I_n > 0$ pour n pair. On a vu que $I_1 = \frac{\pi}{2} > 0$ et pour n impair ≥ 3, d'après II.A) on peut écrire :
$I_n = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^{N\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\, dt$ (relation de Chasles)
et comme au I.E) par les changements affines de variable : $t = u + k\pi$,
$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} (-1)^{nk} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du$ (n impair).
Or la suite $\left(\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et décroisssante (car c'est le cas de la suite $\left(\left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$) et de limite nulle (car $0 < \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n du \leq \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^n du = \frac{1}{\pi^{n-1}k^n}$). La série précédente dont la somme est I_n est alternée et relève de la règle de Leibniz. Non seulement elle converge (ce qu'on savait déjà) mais sa somme I_n est du signe du premier terme : $\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^n du > 0$. Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n > 0}$.

PARTIE III

III.A) Question III.A) :

Calculons les premiers termes :
$g_n^{(0)}(t) = (\sin t)^n$; $g_n^{(1)}(t) = n \cos t (\sin t)^{n-1}$;

$g_n^{(2)}(t) = n(\sin t)^{n-2}\left((n-1)(\cos t)^2 - (\sin t)^2\right) = n(\sin t)^{n-2}\left(n(\cos t)^2 - 1\right)$.
Supposons par récurrence sur k ($k \le n-1$) qu'il existe un polynôme P_k tel que
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_{n,k}(t) = (\sin t)^{n-k} P_k(\cos t)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_{n,k+1}(t) & = & (n-k)(\cos t)P_k(\cos t)\,(\sin t)^{n-k-1} - (\sin t)^{n-k+1}\,P_k'(\cos t) \\ & = & (\sin t)^{n-k-1}\left[(n-k)(\cos t)P_k(\cos t) - (1-(\cos t)^2)P_k'(\cos t)\right] \end{array}.$$

Ainsi la suite de polynômes $(P_k)_{0\le k\le n}$ définie par :
$P_0 = 1;\ P_1 = nX;\ \forall k \in [0, n-1],\ P_{k+1} = (n-k)XP_k - (1-X^2)P_k'$ convient.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ h_{n,k}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-k} P_k(\cos t)$, et les fonctions $(h_{n,k})_{0\le k\le n-2}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (cf. I.C.2 pour le problème en 0) et sont dominées par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ (car $P_k(\cos t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $k \le n-2$) , donc intégrables en $+\infty$.

III.B) Question III.B) :

Pour $n = 2$, il n'y a qu'une seule valeur possible pour k (k=0) et pour $n > 2$ et $0 \le k \le n-3$, opérons une intégration par parties dont la partie intégrée converge :
$(n-k-1)!\int_0^{+\infty} t^{k-n} g_n^{(k)}(t)\,dt = \left[-(n-k-2)!t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t)\right]_0^{+\infty} + (n-k-2)!\int_0^{+\infty} t^{k+1-n}g_n^{(k+1)}(t)\,dt$.
Mais d'après III.A), $t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t) = t\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-k} P_k(\cos t)$, donc : $t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t) = \underset{t\to 0}{\mathcal{O}}(t) \to 0$ quand $t \to 0$ et $t^{k-n+1}g_n^{(k)}(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{t^{n-k-1}}\right) \to 0$ quand $t \to +\infty$ (pour $k \le n-3$, et même pour $k = n-2$ (cf III.C)) .

Finalement on a bien $\boxed{(n-k-1)!\displaystyle\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)\,dt = (n-k-2)!\int_0^{+\infty} h_{n,k+1}(t)\,dt}$, ce qui prouve l'indépendance par rapport à k variant de 0 à n-2 de $(n-k-1)!\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} h_{n,n-2}(t)\,dt$.

III.C) Question III.C) :

Pour $0 \le k \le n-2$, cela découle de l'intégrabilité établie III.A), et pour $k = n-1$, de la convergence de la partie intégrée de la question précédente(avec k=n-2) et de l'existence de l'intégrale du premier membre ; on obtient ainsi $\int_0^{+\infty} h_{n,n-2}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t)\,dt$, et donc compte-tenu du III.B :

$$\boxed{\forall k \in \{0..(n-1)\},\ (n-k-1)!\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t)\,dt}$$

III.D) Question III.D) :

De la définition de $h_{n,n-1}$, de I_n et de III.C) avec k=0 on déduit :

$$\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} h_{n,0}(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t}\,dt}$$

III.E) Question III.E) :

III.E).1

Il s'agit de la linéarisation des puissances entières de $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$:

$$\begin{array}{rcl} 4^p(\sin t)^{2p} & = & (-1)^p(e^{it}-e^{-it})^{2p} = (-1)^p\sum_{k=0}^{2p}(-1)^kC_{2p}^k e^{2(p-k)it} \\ & = & (-1)^p\left((-1)^pC_{2p}^p + 2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k\cos(2(p-k)t)\right) \\ & & \text{(en isolant le terme réel où k=p et en regroupant les termes conjugués associés à k et 2p-k)} \\ & = & \boxed{C_{2p}^p + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^kC_{2p}^{p-k}\cos(2kt)} \text{ (en changeant k en p-k)} \end{array}$$

De même :

$$\begin{array}{rcl} 4^p(\sin t)^{2p+1} & = & (-1)^p\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})^{2p+1} = (-1)^p\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^kC_{2p+1}^k e^{(2(p-k)+1)it} \\ & = & \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^k\sin((2(p-k)+1)t) \\ & & \text{(en regroupant les termes conjugués associés à k et 2p+1-k)} \\ & = & \boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^kC_{2p+1}^{p-k}\sin((2k+1)t)} \text{ (en changeant k en p-k)} \end{array}$$

III.E).2

Sachant que

$\frac{d^n}{dt^n}\cos(\alpha t) = \alpha^n \cos(\alpha t + n\frac{\pi}{2}) = \alpha^n \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(\alpha t) \text{ si n est pair} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin(\alpha t) \text{ si n est impair} \end{cases}$ et que de même

$\frac{d^n}{dt^n}(\sin(\alpha t) = \alpha^n \sin(\alpha t + n\frac{\pi}{2}) = \alpha^n \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin(\alpha t) \text{ si n est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(\alpha t) \text{ si n est impair} \end{cases}$,

on obtient compte-tenu de la question précédente :

$$\begin{cases} g_{2p}^{(2p-1)}(t) = \frac{2}{4^p}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k C_{2p}^{p-k}(2k)^{2p-1}(-1)^p \sin(2kt) \\ g_{2p+1}^{(2p)}(t) = \frac{1}{4^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{p-k}(2k+1)^{2p}(-1)^p \sin((2k+1)t) \end{cases}.$$

Puis d'après III.D, on obtient les formules suivantes où toutes les intégrales existent (on a même par changement de variable affine $u = kt$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(kt)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\,du = I_1$)

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{2}{4^p(2p-1)!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k C_{2p}^{p-k}(2k)^{2p-1}(-1)^p \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2kt)}{t}\,dt & = \frac{1}{(2p-1)!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p}^{p-k}k^{2p-1}I_1 \\ I_{2p+1} = \frac{1}{4^p(2p)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{p-k}(2k+1)^{2p}(-1)^p \int_0^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{t}\,dt & = \frac{1}{(2p)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{p-k}(k+\frac{1}{2})^{2p}I_1 \end{cases}.$$

Et puisque $I_1 = \frac{\pi}{2}$: $\boxed{\begin{cases} I_{2p} = \frac{1}{2(2p-1)!}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p}^{p-k}k^{2p-1}\right)\pi \\ I_{2p+1} = \frac{1}{2(2p)!}\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{p-k}(k+\frac{1}{2})^{2p}\right)\pi \end{cases}}$. Les cas p=1, p=2 donnent :

$$\boxed{I_2 = C_2^0\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2};\ I_3 = \frac{\pi}{4}\left(-C_3^1(\frac{1}{2})^2 + C_3^0(\frac{3}{2})^2\right) = \frac{3\pi}{8};\ I_4 = \frac{\pi}{12}\left(-C_4^1 + C_4^0 2^3\right) = \frac{\pi}{3}}$$

PARTIE IV

IV.A) Question IV.A) :

La fonction $t \mapsto \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$, dominée par $\frac{1}{t^2}$ donc intégrable en $+\infty$ et équivalente en 0 à $\frac{(tx)^n}{t^n} = x^n$, donc C^0 par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Finalement elle est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale proposée existe (même si n=0) .

IV.B) Question IV.B) :

Soit $n \geq 2$. L'application ϕ : $(x,t) \mapsto \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}$, par compositions et quotient de fonctions C^∞, est C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et dominée par $\frac{|x|^n}{1+t^2}$ (puisque $|\sin(tx)| \leq |tx|$) et donc, si on se restreint à $0 \leq x \leq b$, avec $b > 0$, par $\frac{b^n}{1+t^2}$ fonction C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De même la dérivée partielle $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) = n\frac{\cos(tx)(\sin tx)^{n-1}}{t^{n-1}(1+t^2)}$ est C^0 sur $[0,b]\times\mathbb{R}_+^*$, dominée par $\frac{nb^{n-1}}{1+t^2}$qui est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin (cf les calculs du III.A), $(x,t) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = n\frac{[n(\cos tx)^2-1](\sin tx)^{n-2}}{t^{n-2}(1+t^2)}$ est C^0 sur $[0,b]\times\mathbb{R}_+^*$, dominée par $\frac{n(n+1)b^{n-2}}{1+t^2}$ (car $n-2 \geq 0$) qui est C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il découle alors du théorème de dérivation sous l'intégrale avec hypothèses de domination que $x \mapsto A_n(x) = \int_0^{+\infty}\frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\,dt$ est de classe C^2 sur tout segment $[0,b],(b>0)$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_n'(x) = \int_0^{+\infty} n\frac{\cos(tx)(\sin tx)^{n-1}}{t^{n-1}(1+t^2)}\,dt,\quad A_n''(x) = \int_0^{+\infty} n\frac{[n(\cos tx)^2-1](\sin tx)^{n-2}}{t^{n-2}(1+t^2)}\,dt}$$

Pour $n = 1$, la démonstration précédente s'applique pour la dérivée première mais pas pour la seconde (car $n-2<0$) ; en effet $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = n\frac{-t\sin tx}{(1+t^2)}$ et la majoration précédente n'est plus valable ; A_1 sera déterminée au D) .

Pour $n = 0$, $A_0(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ est une constante.

Remarquons également que $A_n(x)$ existe pour tout réel x et qu'alors A_n à la parité de n.

Pour $n \geq 2$, et $x > 0$ nous avons donc :

$$\begin{aligned} \boxed{A_n''(x) - n^2A_n(x) - n(n-1)A_{n-2}(x)} &= \int_0^{+\infty}\frac{nt^2[n(\cos tx)^2-1](\sin tx)^{n-2} - n^2(\sin tx)^n - n(n-1)t^2(\sin tx)^{n-2}}{t^n(1+t^2)}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{-n^2(t^2+1)(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{-n^2(\sin tx)^n}{t^n}\,dt \\ &= -n^2x^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin u)^n}{u^n}\,du \text{ (chgt de variable } t = \tfrac{u}{x},\ avec\ x>0) \\ &= \boxed{-n^2x^{n-1}I_n} \end{aligned}$$

Cette relation est encore vérifiée pour $x = 0$, puisqu'alors le second membre ($\int_0^{+\infty}\frac{-n^2(\sin tx)^n}{t^n}\,dt$) est nul comme $n^2x^{n-1}I_n$.

A_n vérifie donc sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle (E_n) pour $n \geq 2$.

Remarquons que le signe de x intervient dans les bornes de l'intégrale lors du dernier changement de variable et que l'équation différentielle vérifiée par A_n sur $\mathbb{R}_-$ n'est pas exactement la même - il faudrait changer $-n^2x^{n-1}I_n$ en $+n^2x^{n-1}I_n$

IV.C) Question IV.C) :

IV.C).1

(E_2) s'écrit : $y''-4y=2A_0(x)-4xI_2=\pi-4xI_2$. Cherchons une solution particulière de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre binômial sous la forme d'un binôme $ax+b$ puisque 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2-4r=0$. $-4(ax+b)=\pi-4xI_2$ est vérifiée pour $a=I_2$ et $b=-\frac{\pi}{4}$ et la solution générale de l'équation (E_2) s'écrit : $\boxed{y=I_2x-\dfrac{\pi}{4}+\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}}$.

IV.C).2

On sait que A_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+$ et caractérisée par les conditions initiales $A_2(0)=0$ et $A_2'(0)=0$ (cf calculs de IV.B) ; d'où les valeurs de α et β donnant A_2 sont les solutions du système : $\begin{cases}\alpha+\beta &=\frac{\pi}{4}\\ 2(\alpha-\beta) &=-I_2\end{cases}$. Finalement on obtient $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}I_2\right)$ et $\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}I_2\right)$ d'où sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{A_2(x)=I_2x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}I_2\right)e^{2x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}I_2\right)e^{-2x}}$$

IV.C).3

D'après les dominations déja rencontrées au IV.B) : $|A_2(x)|\leq x^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}x^2=\underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^2)$. Ainsi dans l'expression de $A_2(x)$ le coefficient $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}I_2\right)$ de e^{2x} est nul sinon $A_2(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\alpha e^{2x}$ ne saurait être dominé par x^2. D'où :

$$\boxed{I_2=\frac{\pi}{2}\text{ et }\forall x\in\mathbb{R}_+,\ A_2(x)=\frac{\pi}{4}\left(e^{-2x}+2x-1\right)}$$

IV.D) Question IV.D) :

D'après les résultats du IV.A), dans le cas $n=1$, on obtient : $A_1'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$ et pour $n=2$: $A_2''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos(2tx)}{1+t^2}\,dt=2A_1'(2x)=\frac{d}{dx}(A_1(2x))$. D'où puisque $A_1(0)=0=A_2'(0)$ et compte-tenu du résultat de IV.C.3) :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ A_1(x)=A_2'(\frac{x}{2})=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-x}\right)}$$

IV.E) Question IV.E) :

Raisonnons de même qu'au IV.C.1) pour déterminer I_3 et A_3 :

1. (E_3) : $y''-9y=6A_1(x)-9x^2I_3=3\pi-9x^2I_3-3\pi e^{-x}$ et l'équation caractéristique associée est $r^2-9=0$.
2. La fonction $I_3x^2+\frac{2I_3-3\pi}{9}+\frac{3\pi}{8}e^{-x}$ est une solution particulière de (E_3).
3. La solution générale de (E_3) s'écrit donc : $y=I_3x^2+\frac{2I_3-3\pi}{9}+\frac{3\pi}{8}e^{-x}+\alpha e^{3x}+\beta e^{-3x}$
4. Sur $\mathbb{R}_+$, A_3 est la solution de (E_3) qui vérifie les conditions initiales (cf calculs du IV.B) : $A_3(0)=A_3'(0)=0$ ce qui conduit au système : $\begin{cases}\alpha+\beta &=-\frac{\pi}{24}-\frac{2I_3}{9}\\ \alpha-\beta &=\frac{\pi}{8}\end{cases}$. D'où $\alpha=\frac{\pi}{24}-\frac{I_3}{9},\ \beta=-\frac{\pi}{12}-\frac{I_3}{9}$.
5. Ainsi on obtient $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ A_3(x)=I_3x^2+\frac{2I_3-3\pi}{9}+\frac{3\pi}{8}e^{-x}+\left(\frac{\pi}{24}-\frac{I_3}{9}\right)e^{3x}+\left(-\frac{\pi}{12}-\frac{I_3}{9}\right)e^{-3x}$.
6. On a toujours la majoration : $|A_3(x)|\leq\frac{x^3\pi}{2}=\underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^3)$, d'où $\alpha=\frac{\pi}{24}-\frac{I_3}{9}=0$
7. Finalement :

$$\boxed{I_3=\frac{3\pi}{8}\text{ et }\forall x\in\mathbb{R}_+,\ A_3(x)=\frac{\pi}{8}\left(-e^{-3x}+3e^{-x}+3x^2-2\right)}$$

IV.F) Question IV.F) :

La formule demandée avec les contraintes de degré et de parité est incorrecte (les cas n=1, n=2, n=3 ... en sont des contre-exemples). Il convient de supprimer le terme e^{-x} situé devant $Q_n(e^{-x})$.

Démontrons la formule ainsi corrigée ($A_n(x) = Q_n(e^{-x}) + R_n(x)$ avec degré$(R_n) = n-1$, degré$(Q_n) = n$, R_n et Q_n ayant les parités respectives de $n-1$, n) par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, d'après IV.D) $Q_1(X) = -\frac{\pi}{2}X$ et $R_1 = \frac{\pi}{2}$ conviennent.
Pour $n = 2$, d'après IV.C) $Q_2(X) = \frac{\pi}{4}(X^2-1)$ et $R_2 = \frac{\pi}{2}X$ conviennent.
Pour $n = 3$, d'après IV.E) $Q_3(X) = -\frac{\pi}{8}(X^3-3X)$ et $R_3 = \frac{\pi}{8}(3X^2-2)$ conviennent.

Mais la question sur le degré de Q_n est assez délicate et nécessite un traitement à part, voire des résultats intermédiaires à établir (cette difficulté a-t-elle été vraiment voulue par le concepteur du sujet ?). Nous procéderons donc en deux étapes :

1. Démonstration de la formule demandée mais avec la condition $\deg(Q_n) \leq n$ au lieu de $\deg(Q_n) = n$.
2. Calcul explicite de Q_n et mise en évidence que son degré est bien n.

1ère étape :
L'initialisation aux rangs $n = 1, 2, 3$, a été vérifiée plus haut et remarquons que l'on peut l'étendre au rang $n = 0$ en posant $A_0(x) = Q_0(e^{-x}) = \beta_{0,0} = \frac{\pi}{2}$ et $R_0(x) = 0$.
Supposons maintenant que la propriété demandée (avec $\deg(Q_n) \leq n$) soit vérifiée au rang $n-2 \geq 0$ et écrivons $A_{n-2}(x) = Q_{n-2}(e^{-x}) + R_{n-2}(x) = \sum_{\substack{k=0\\k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx} + R_{n-2}(x)$.
L'équation (E_n) s'écrit alors : $y'' - n^2y = n(n-1)\sum_{\substack{k=0\\k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx} + n(n-1)R_{n-2}(x) - n^2x^{n-1}I_n$.
La technique de superposition des solutions nous permet de chercher une solution particulière sous la forme $P_n(e^{-x}) + R_n(x)$ où

1. $P_n(e^{-x}) = \sum_{\substack{k=0\\k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2-n^2}\beta_{n-2,k}\, e^{-kx}$ est solution de $y'' - n^2y = n(n-1)\sum_{\substack{k=0\\k+n \text{ pair}}}^{n-2} \beta_{n-2,k}\, e^{-kx}$
2. $R_n(x)$ solution de $y'' - n^2y = n(n-1)R_{n-2}(x) - n^2x^{n-1}I_n$.

Remarquons que ce dernier second membre est un polynôme en x de degré $(n-1)$ compte-tenu de l'hypothèse de récurrence et du fait que $I_n \neq 0$ (cf II.D).

Dans l'espace vectoriel de dimension finie n des polynômes de degré au plus $(n-1)$, l'application linéaire $y \mapsto y'' - n^2y$ est un automorphisme (par exemple sa matrice dans la base canonique est trigonale et a pour coefficients diagonaux la seule valeur propre $(-n^2 \neq 0)$; On peut donc prendre pour $R_n(x)$ un polynôme de degré (n-1), son coefficient dominant étant d'ailleurs $\boxed{I_n}$. De plus y et y" ayant le même parité, l'application $y \mapsto y'' - n^2y$ laisse stable les deux sous-espaces supplémentaires formés des polynômes pairs (respectivement impairs) de degré au plus $(n-1)$ et induit donc pour des raisons de dimension un isomorphisme sur chacun de ses espaces. Comme le second membre à la parité de $(n-1)$ par construction et hypothèse de récurrence, on en déduit que R_n a bien la parité de $(n-1)$.

Finalement on peut écrire la solution A_n sur $\mathbb{R}_+$ sous la forme : $A_n(x) = P_n(e^{-x}) + R_n(x) + \alpha e^{nx} + \beta e^{-nx}$
Mais comme au IV.E), on a la majoration $|A_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}x^n = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^n)$ et donc $\alpha = 0$ (sinon $A_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha e^{nx}$ ce qui est contradictoire avec la majoration précédente). Soit le résultat voulu :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ A_n(x) &= \beta e^{-nx} + \sum_{\substack{k=0\\k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2-n^2}\beta_{n-2,k}\, e^{-kx} + R_n(x) \\ &= Q_n(e^{-x}) + R_n(x) \\ &\quad \text{où } Q_n(X) = \beta X^n + \sum_{\substack{k=0\\k+n \text{ pair}}}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k^2-n^2}\beta_{n-2,k}\, X^k \end{aligned}}$$

Les polynômes Q_n et R_n conviennent visiblement, mais remarquons qu'à ce stade le coefficient β n'est pas connu et on ne peut pas affirmer que le degré de Q_n soit exactement n. Conformément à la notation générale on pose désormais $\beta_{n,n} = \beta$.

2ème étape :
On sait d'après les calculs du IV.B) que pour $n \geq 2$, $A_n(0) = A'_n(0) = 0$ et donc que $Q_n(1) + R_n(0) = -Q'_n(1) + R'_n(0) = 0$, mais compte-tenu de la parité de R_n on a : $R_{2p}(0) = 0$ et $R'_{2p+1}(0) = 0$, d'où : $Q_{2p}(1) = -Q'_{2p+1}(1) = 0$, et donc selon l'écriture générale des coefficients des polynômes A_n :

$$\forall p \geq 1,\ \beta_{2p,2p} = -\sum_{k=0}^{p-1}\beta_{2p,2k} \text{ et } \beta_{2p+1,2p+1} = -\frac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)\beta_{2p+1,2k+1}$$

Par ailleurs l'expression de Q_n vue à la première étape donne les relations de récurrence suivantes en distinguant les cas n pair $(= 2p \geq 2)$ et n impair $(= 2p+1 \geq 3)$:
$\forall p \geq (k+1)$, $\beta_{2p,2k} = \frac{2p(2p-1)}{4(k-p)(k+p)}\beta_{2(p-1),2k}$ et $\beta_{2p+1,2k+1} = \frac{2p(2p+1)}{4(k-p)(k+p+1)}\beta_{2p-1,2k+1}$
On obtient immédiatement par récurrence sur $p \geq k+1$:

$$\beta_{2p,2k} = \left(\prod_{r=k+1}^{p}\frac{2r(2r-1)}{(k-r)(k+r)}\right)(-4)^{k-p}\beta_{2k,2k} = \frac{(2p)!}{(2k)!}\frac{(2k)!}{(p-k)!(p+k)!}(-4)^{k-p}\beta_{2k,2k}$$

$$\boxed{\beta_{2p,2k}} = \boxed{(-4)^{k-p}C_{2p}^{p-k}\beta_{2k,2k}} \quad \text{et}$$

$$\beta_{2p+1,2k+1} = \left(\prod_{r=k+1}^{p}\frac{2r(2r+1)}{(k-r)(k+r+1)}\right)(-4)^{k-p}\beta_{2k+1,2k+1} = \frac{(2p+1)!}{(2k+1)!}\frac{(2k+1)!}{(p-k)!(p+k+1)!}(-4)^{k-p}\beta_{2k+1,2k+1}$$

$$\boxed{\beta_{2p+1,2k+1}} = \boxed{(-4)^{k-p}C_{2p+1}^{p-k}\beta_{2k+1,2k+1}}$$

Ainsi tous les coefficients du polynôme Q_n sont connus dès que les coefficients $(\beta_{k,k})_{0\leq k\leq n-2}$ le sont ; et ce sont justement ceux dont on doit montrer la non nullité !
Au vu des premiers coefficients : $\beta_{1,1} = -\frac{\pi}{2},\ \beta_{2,2} = \frac{\pi}{4},\ \beta_{3,3} = -\frac{\pi}{8}$ on peut "raisonablement" conjecturer que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \beta_{n,n} = (-1)^n\frac{\pi}{2^n}}$$

Enfin remarquons le cas particulier de $\beta_{0,0} = \frac{\pi}{2}$ qui ne rentre pas dans la forme précédente.

Nous allons démontrer cette formule par récurrence sur p en distinguant les cas n pair (=2p) et n impair (=2p+1).

Cas n =2p (≥ 2)

La formule est vérifiée au rang $p = 1$ et supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $p-1 \geq 1$, alors d'après les relations établies ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\beta_{2p,2p} &= -\sum_{k=0}^{p-1}\beta_{2p,2k} = -\sum_{k=0}^{p-1}(-4)^{k-p}C_{2p}^{p-k}\beta_{2k,2k}\\
&\quad \text{et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence en distinguant le cas } k=0\\
&= -\sum_{k=1}^{p-1}(-4)^{k-p}C_{2p}^{p-k}\frac{\pi}{2^{2k}} - (-4)^{-p}C_{2p}^{p}\frac{\pi}{2}\\
&= -\frac{\pi}{2^{2p}}\left(\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k}C_{2p}^{p-k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right)\\
&= -\frac{\pi}{2^{2p}}\left(\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right) \text{ (en changeant k en p-k)}\\
&= -\frac{\pi}{2^{2p}}\left(\sum_{k=p+1}^{2p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right) \text{ (en changeant k en 2p-k, sachant que } C_{2p}^{2p-k} = C_{2p}^{k})\\
&= -\frac{\pi}{2^{2p+1}}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{2p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} + (-1)^pC_{2p}^{p}\right) \text{ (par demi-somme des deux derniers résultats)}\\
&= -\frac{\pi}{2^{2p+1}}\sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^{k}C_{2p}^{k} = -\frac{\pi}{2^{2p+1}}\left(\sum_{k=0}^{2p}(-1)^{k}C_{2p}^{k} - 2\right)\\
&= \boxed{\frac{\pi}{2^{2p}}} \text{ (car } \sum_{k=0}^{2p}(-1)^kC_{2p}^k = (1-1)^{2p} = 0 \text{ pour } p \geq 1)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence et on peut écrire :

$$\boxed{\forall p \geq 1 :\ \beta_{2p,2p} = \frac{\pi}{4^p} \neq 0 \text{ et } Q_{2p}(X) = \frac{\pi}{4^p}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}C_{2p}^{p-k}X^{2k} + \frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^{p}\right)}$$

Cas n =2p+1 (≥ 1)

On procède de même : La formule est vérifiée au rang $p = 0$ et supposons qu'elle le soit jusqu'au rang $p-1 \geq 0$, alors d'après les relations établies ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\beta_{2p+1,2p+1} &= -\frac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)\beta_{2p+1,2k+1} = -\frac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)(-4)^{k-p}C_{2p+1}^{p-k}\beta_{2k+1,2k+1}\\
&\quad \text{et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-4)^{k-p}(2k+1)C_{2p+1}^{p-k}\frac{\pi}{2^{2k+1}}\\
&= \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(2k+1)C_{2p+1}^{p-k}\\
&= \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}(2p-2k+1)C_{2p+1}^{k} \text{ (en changeant k en p-k)}\\
&= \frac{\pi}{2^{2p+1}(2p+1)}\sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^{k+1}(-2p+2k-1)C_{2p+1}^{k} \text{ (en changeant k en 2p+1-k)}\\
&= \frac{\pi}{2^{2p+2}(2p+1)}\sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k}(2p-2k+1)C_{2p+1}^{k} \text{ (par demi-somme des deux derniers résultats)}\\
&= \frac{\pi}{2^{2p+2}(2p+1)}\left(\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^{k}(2p+1-2k)C_{2p+1}^{k} - (2p+1) - (2p+1)\right)\\
&= \boxed{-\frac{\pi}{2^{2p+1}}}\\
&\quad \text{(car } \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k(2p+1)C_{2p+1}^k = (2p+1)(1-1)^{2p+1} = 0 \text{ et } kC_{2p+1}^k = (2p+1)C_{2p}^{k-1}\\
&\quad \text{donc } \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^kkC_{2p+1}^k = \sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k(2p+1)C_{2p}^{k-1} = (2p+1)(1-1)^{2p} = 0)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence et on peut écrire :

$$\boxed{\forall p \geq 0 :\ \beta_{2p+1,2p+1} = -\frac{\pi}{2^{2p+1}} \neq 0 \text{ et } Q_{2p+1}(X) = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+1-k}C_{2p+1}^{p-k}X^{2k+1}}$$

Bonus : un petit programme en Maple pour déterminer les valeurs de $(I_n)_{n\leq 2N+1}$ et de $(A_n(x))_{n\leq 2N+1}$ et sa réalisation pour N=4 :

```
y2:=diff(y(x),x,x): eq:=y2-n^2*y(x)=n*(n-1)*a-n^2*x^(n-1)*j:
B:=Pi/2: C:=Pi/2-Pi/2*exp(-x): s1:=J(1)=Pi/2: s2:=A(0)=B,A(1)=C:
for p from 1 to N do
eqpair:=subs({n=2*p,a=B},eq); eqimpair:=subs({n=2*p+1,a=C},eq);
convert(dsolve({eqpair,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(x)),exp): expand(%):
solde:=combine(%,exp): sold:=collect(solde,exp(2*p*x),simplify);
sort(sold,exp(2*p*x)); alpha:=op([2,1,1],sold); k:=solve(alpha=0):
sol:=subs(j=k,sold); B:=subs(sol,y(x)): s1:=s1,J(2*p)=k:
B1:=subs(exp(x)=1/X,expand(B)): sort(B1,[x,X],plex); Q:=coeff(B1,x,0):
R:=B1-Q: l:=lcoeff(Q,X): Q:=expand(Q/l):
s2:=s2,A(2*p)=l*combine(subs(X=exp(-x),Q),exp)+R:
convert(dsolve({eqimpair,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(x)),exp): expand(%):
solde:=combine(%,exp): sold:=collect(solde,exp((2*p+1)*x),simplify);
sort(sold,exp((2*p+1)*x)); alpha:=op([2,1,1],sold); k:=solve(alpha=0):
sol:=subs(j=k,sold); C:=subs(sol,y(x)): s1:=s1,J(2*p+1)=k:
C1:=subs(exp(x)=1/X,expand(C)): sort(C1,[x,X],plex); R:=coeff(C1,X,0):
Q:=C1-R: l:=lcoeff(Q,X): Q:=expand(Q/l):
s2:=s2,A(2*p+1)=l*combine(subs(X=exp(-x),Q),exp)+R:
od:
s1; s2;
```

Et les résultats pour $N = 4$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\pi,\ I_2 = \frac{1}{2}\pi,\ I_3 = \frac{3}{8}\pi,\ I_4 = \frac{1}{3}\pi,\ I_5 = \frac{115}{384}\,\pi \\ I_6 &= \frac{11}{40}\,\pi,\ I_7 = \frac{5887}{23040}\,\pi,\ I_8 = \frac{151}{630}\,\pi,\ I_9 = \frac{259723}{1146880}\,\pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\pi,\ A_1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\, e^{-x},\ A_2 = \frac{1}{4}\pi\, \left(e^{-2\,x} - 1\right) + \frac{1}{2}\pi\, x, \\ A_3 &= -\frac{1}{8}\pi\, \left(e^{-3\,x} - 3\,e^{-x}\right) + \frac{3}{8}\pi\, x^2 - \frac{1}{4}\pi, \\ A_4 &= \frac{1}{16}\pi\, \left(e^{-4\,x} - 4\,e^{-2\,x} + 3\right) + \frac{1}{3}\pi\, x^3 - \frac{1}{4}\pi\, x, \\ A_5 &= -\frac{1}{32}\pi\, \left(e^{-5\,x} - 5\,e^{-3\,x} + 10\,e^{-x}\right) + \frac{115}{384}\,\pi\, x^4 - \frac{5}{32}\,\pi\, x^2 + \frac{3}{16}\pi, \\ A_6 &= \frac{1}{64}\,\pi\, \left(e^{-6\,x} - 6\,e^{-4\,x} + 15\,e^{-2\,x} - 10\right) + \frac{11}{40}\,\pi\, x^5 - \frac{1}{8}\pi\, x^3 + \frac{3}{16}\pi\, x, \\ A_7 &= -\frac{1}{128}\,\pi\, \left(e^{-7\,x} - 7\,e^{-5\,x} + 21\,e^{-3\,x} - 35\,e^{-x}\right) + \frac{5887}{23040}\,\pi\, x^6 - \frac{77}{768}\,\pi\, x^4 + \frac{7}{64}\,\pi\, x^2 - \frac{5}{32}\,\pi, \\ A_8 &= \frac{1}{256}\,\pi\, \left(e^{-8\,x} - 8\,e^{-6\,x} + 28\,e^{-4\,x} - 56\,e^{-2\,x} + 35\right) + \frac{151}{630}\,\pi\, x^7 - \frac{1}{12}\pi\, x^5 + \frac{1}{12}\pi\, x^3 - \frac{5}{32}\,\pi\, x, \\ A_9 &= -\frac{1}{512}\,\pi\, \left(e^{-9\,x} - 9\,e^{-7\,x} + 36\,e^{-5\,x} - 84\,e^{-3\,x} + 126\,e^{-x}\right) + \frac{259723}{1146880}\,\pi\, x^8 - \frac{289}{4096}\,\pi\, x^6 + \frac{129}{2048}\,\pi\, x^4 \\ &\qquad - \frac{45}{512}\,\pi\, x^2 + \frac{35}{256}\,\pi \end{aligned}$$

****