Concours Communs INP 2019

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Corrigé

Problème 1

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

Q1. Il s'agit de justifier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. L'application $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, en tant que composition de l'application polynomiale $t \mapsto -t(1-itx)$, continue sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$, et de l'application exponentielle, continue sur $\mathbf{C}$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence infini. Elle est donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbf{R}_+$, et le problème d'intégrabilité ne se pose qu'au voisinage de $+\infty$.

Pour tout nombre réel t on a : $\left|t^2 e^{-t(1-itx)}\right| = t^2 e^{-t}$ et donc, par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \left|e^{-t(1-itx)}\right| = 0.$$

On en déduit : $\left|e^{-t(1-itx)}\right| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc par comparaison on en déduit que l'application $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, et on en déduit que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Q2. Soit $p \in \mathbf{N}$. L'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$: le seul problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$. La fonction étant positive, on peut procéder par relation de comparaison. Or on a, d'après le théorème des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \cdot t^p e^{-t} = 0$. On en déduit :

$$t^p e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc l'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

On en déduit que l'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

Donnons à présent une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p : passer de t^{p+1} à t^p dans l'intégrande se fait en intégrant par parties. Soit, donc, a un réel positif ; l'application $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, a]$ et l'application $t \mapsto t^{p+1}$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\int_0^a t^{p+1}e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{p+1}e^{-t}\right]_0^a - \int_0^a (-e^{-t})(p+1)t^p\mathrm{d}t = -a^{p+1}e^{-a} + (p+1)\int_0^a e^{-t}t^p\mathrm{d}t.$$

Or : $\lim\limits_{a\to+\infty} a^{p+1}e^{-a} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On en déduit, quand $a \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-t}\mathrm{d}t = (p+1)\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p.$$

Q3. On a immédiatement : $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = \left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = 1$. Voyons comment, par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$, on en déduit l'égalité : $\Gamma_p = p!$. Si $p = 0$, cela vient d'être établi, vu que $0! = 1$ et $\Gamma_0 = 1$. Soit $p \in \mathbf{N}$, et supposons que $\Gamma_p = p!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p = (p+1)p! = (p+1)!,$$

donc l'égalité voulue est héréditaire. Nous l'avons initialisée, donc par principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \Gamma_p = p!.$$

Q4. Nous allons montrer que f est de classe C^p pour tout $p \in \mathbf{N}$, à l'aide du théorème de régularité C^p des intégrales à paramètre. Posons :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad g(x,t) = e^{-t(1-itx)} = e^{-t}e^{it^2x}.$$

Alors :

— pour tout tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^p sur $\mathbf{R}$, puisqu'elle s'obtient en composant une application polynomiale et l'exponentielle complexe, et on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t) = \left(it^2\right)^p e^{-t}e^{it^2x};$$

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ par un argument analogue à celui ci-dessus ;

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, on a :

$$\left|\frac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)\right| = t^{2p}e^{-t};$$

et l'application $t \mapsto t^{2p}e^{-t}\mathrm{d}t$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ d'après la question **Q2**, ce qui démontre à la fois, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)$ sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, et l'hypothèse de domination.

On en déduit, d'après le théorème de régularité C^p des intégrales à paramètre, que f est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)\mathrm{d}t = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t.$$

Q5. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!}\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{i^p}{p!}\Gamma_{2p} = i^p\frac{(2p)!}{p!}.$$

Ce terme n'est jamais nul et on a, pour tout x non nul et p au voisinage de l'infini :

$$\frac{\left|\dfrac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p\right|} = \frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \times \frac{p!}{(2p)!}|x| = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1}|x| \underset{p\to+\infty}{\sim} 4p|x| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty,$$

donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ non nul la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ diverge grossièrement d'après la règle de D'Alembert. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est nul.

Si f est développable en série entière en 0, alors f est égale à sa série de Taylor dans un voisinage de 0 ; or sa série de Taylor diverge en tout réel non nul d'après ce qui précède, donc c'est impossible. On en déduit que f n'est pas développable en série entière en 0.

Q6. Nous allons vérifier que g est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$ grâce au théorème de dérivation terme à terme, démontrant au passage l'existence de la somme qui définit g. Posons :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k(x) = e^{-k(1-ikx)}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application g_k est manifestement de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$: à multiplication près par la constante e^{-k}, elle s'obtient en composant l'application polynomiale $x \mapsto k^2x$, de classe C^∞

sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, avec l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{ix}$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ parce que sa partie réelle (le cosinus) et sa partie imaginaire (le sinus) le sont. On a de plus :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2 x},$$

avec la convention ici que pour $p = k = 0$, on a : $k^{2p} = 1$.
Pour tout $p \in \mathbf{N}$, étudions le mode de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_k$: pour tout $p \in \mathbf{N}$, tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$. On en déduit :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{N}, \quad \|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}.$$

Montrons que pour tout $p \in \mathbf{N}$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \|g_k^{(p)}\|_\infty = \sum\limits_{k \geqslant 0} k^{2p} e^{-k}$ converge : elle est à termes positifs, et on montre comme aux questions **Q1** et **Q2** que $k^{2p} e^{-k} = \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, grâce au théorème des croissances comparées. Or la série de Riemann $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} k^{2p} e^{-k}$ converge pour tout $p \in \mathbf{N}$.
Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}$ la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_k^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément (et simplement) sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, on en déduit que $g = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g$ est de classe C^p pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{N}, \quad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}.$$

Q7. Soit $p \in \mathbf{N}$. D'après la question précédente :

$$\left|g^{(p)}(0)\right| = \left| i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = |i|^p \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right|.$$

Or $|i| = 1$, et la somme est positive, donc :

$$\left|g^{(p)}(0)\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} = p^{2p} e^{-p} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} \underbrace{k^{2p} e^{-k}}_{\geqslant 0} \geqslant p^{2p} e^{-p},$$

d'où le résultat.

Q8. Montrons que la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p$ est de rayon de convergence nul. Pour tout réel x non nul, et pour tout p au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\left|\frac{(p+1)^{2(p+1)}e^{-(p+1)}}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p\right|} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}(p+1)e^{-1}|x| \geqslant pe^{-1}|x| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ non nul : $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\left|\frac{(p+1)^{2(p+1)}e^{-(p+1)}}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p\right|} = +\infty$. D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{p\geqslant 0} \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p$ diverge donc grossièrement pour tout x non nul, donc la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p$ est de rayon de convergence nul.

Or : $\forall p \in \mathbf{N}$, $\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right| \geqslant \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}$. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries entières, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est inférieur ou égal à 0, donc est nul.

Par le même argument que dans la question **Q5**, on en déduit que g n'est pas développable en série entière en 0.

Partie II – Le théorème de Borel

Q9. On a : $X^2+1 = (X+i)(X-i)$. La décomposition en éléments simples assure l'existence de deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{C}$ différent de i et $-i$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Pour les déterminer, notons que si l'on multiplie cette égalité par $x-i$, et qu'on pose $x=i$, on obtient :

$$\frac{1}{2i} = a,$$

et de même, en multipliant cette égalité par $x+i$ et en posant $x=-i$, on obtient $b = -\frac{1}{2i}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

Q10. Tout d'abord, ψ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, en tant qu'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. On doit montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Pour cela, notons qu'il s'agit d'une évidence si $p = 0$, par définition de ψ. À présent, soit $p \in \mathbf{N}$, et supposons que cette égalité soit vraie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Alors, en la dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi^{(p+1)}(x) = \left(\psi^{(p)}\right)'(x) = (-1)^p p! \times \left(-\frac{p+1}{(x-i)^{p+2}}\right) = (-1)^{p+1}(p+1)! \times \frac{1}{(x-i)^{p+1+1}},$$

d'où l'hérédité de cette l'égalité. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ par principe de récurrence.

Q11. Un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet de montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ est $x \mapsto \dfrac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$. Or, d'après la question **Q9**, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}.$$

Q12. Soient $p \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. Alors :

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p-1}| = \left|2i\mathrm{Im}\left((x+i)^{p+1}\right)\right| \leqslant 2\left|(x+i)^{p+1}\right| = 2|x+i|^{p+1} = 2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{p+1},$$

d'où le résultat demandé en écrivant : $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{p+1} = (x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}$.

En utilisant l'expression de $\varphi^{(p)}(x)$ trouvée dans la question précédente, on en déduit :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{2} \times \frac{|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}|}{(x^2+1)^{p+1}} = p! \times \frac{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}},$$

et si x est non nul on peut même écrire :

$$\frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leqslant \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Finalement :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \; \forall x \in \mathbf{R}^*, \quad \left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Notons d'abord que si $\alpha = 0$, alors l'inégalité demandée est une évidence. Nous mettons donc ce cas de côté plus bas.

Pour tout réel α et tout réel x, on a : $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$. Ainsi φ_α n'est rien d'autre que la composition de la fonction $x \mapsto \alpha x$ et de φ_1, ce qui permet d'écrire par une récurrence facile :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}^*, \quad \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| = \left|\alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right|, \tag{1}$$

et donc, d'après la question précédente (où l'on remplace x par αx), pour tous réels α et x non nuls on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad |\alpha| \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant |\alpha|^{p+1} \times \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}},$$

d'où le résultat.

Q14. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $u_n(x) = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$. Or $f_n : x \mapsto a_n x^n$ et φ_{α_n} sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. D'après la formule de dérivation de Leibniz, l'application u_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad u_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

d'où le résultat.

Q15. Soient $n \geqslant 0$ un entier et $p \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $x \mapsto x^{n-k}$ s'annule en 0 pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ (sous cette hypothèse, on a : $n-k \geqslant n-p \geqslant 1$). Donc, d'après la question précédente, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$. À présent, si l'on prend $p = n$ dans (2), on constate que le terme de la somme correspondant à $k = p = n$ est $n!\varphi_{\alpha_n}(x)$: il est égal à $n!$ quand $x = 0$. Tous les autres termes de cette somme s'annulent en 0 pour la même raison que ci-dessus. Donc :

$$u_n^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Q16. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \mathbf{R}$. Si $x = 0$, alors ce cas fut déjà traité dans la question **Q15**, et on a bien $\left|u_n^{(p)}(0)\right| = 0 \leqslant \dfrac{|0|^{n-p-1}}{\sqrt{n}} p! 2^n$. Supposons donc $x \neq 0$. D'après (2) et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |a_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right|.$$

D'après la question **Q13**, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a :

$$|a_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{n!}} |\alpha_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}},$$

et on en déduit :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(p-k)! = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

car $n \geqslant p$ et nous sommons des termes positifs. Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

donc nous avons démontré :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n,$$

et c'est le résultat attendu.

Q17. Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de dérivation terme à terme sur tout segment de $\mathbf{R}$, dans le cas des applications de classe C^p.
Soit $a \in \mathbf{R}$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant p+1,\ \forall x \in [-a, a], \quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \leqslant \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}},$$

donc, si l'on considère la norme infinie sur $[-a, a]$:

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant p+1, \quad 0 \leqslant \|u_n^{(p)}\|_\infty \leqslant \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, montrons que la série $\sum\limits_{n \geqslant p+1} \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$ converge. C'est une série à termes positifs, et pour tout $p \in \mathbf{N}$, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\dfrac{p! 2^{n+1} |a|^{n-p}}{((n+1)!)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc la série $\sum\limits_{n \geqslant p+1} \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$ converge d'après la règle de D'Alembert. On en déduit, d'après (3) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant p+1} u_n^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément (et simplement), sur tout segment de la forme $[-a, a]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, vérifié sur tout segment de $\mathbf{R}$ (on peut en effet inclure tout segment de $\mathbf{R}$ dans un segment de la forme $[-a, a]$), on en déduit que la somme

$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Il en est donc de même de $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on ajoute une somme finie de fonctions de classe C^∞), et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Q18. On a : $U(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$. Il est évident, d'après la définition de u_n, que $u_n(0) = a_n$ si $n = 0$ et $u_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$. Donc $U(0) = a_n$.
Soit $p \geqslant 1$ un entier. Alors :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0),$$

et d'après la question **Q15** on a $u_n^{(p)}(0) = 0$ dès que $p \leqslant n-1$ (c'est-à-dire $n \geqslant p+1$) et $u_p^{(p)}(0) = p!a_p$, donc :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p,$$

d'où le résultat.

Q19. Soit $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles. Inspirés par la question précédente, on cherche une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0, \\ b_1 & = & u_0'(0) + 1!a_1, \\ b_2 & = & u_0''(0) + u_1''(0) + 2!a_2, \\ & \vdots & \\ \forall p \in \mathbf{N}\setminus\{0\},\ b_p & = & \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p. \end{array}\right.$$

Pour cela, on note qu'on peut construire une telle suite par récurrence ainsi, en posant successivement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & b_0, \\ \alpha_0 & = & a_0, \\ \forall x \in \mathbf{R},\ u_0(x) & = & a_0\varphi_{\alpha_0}(x), \end{array}\right. \quad \text{puis : } \forall p \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \left\{\begin{array}{rcl} a_p & = & \dfrac{1}{p!}\left(b_p - \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right), \\ \alpha_p & = & \sqrt{p!}a_p, \\ \forall x \in \mathbf{R},\ u_p(x) & = & a_p x^p \varphi_{\alpha_p}(x). \end{array}\right.$$

Il s'agit bien d'une construction par récurrence licite (la définition de a_p n'utilise que b_p et des fonctions déjà définies pour des rangs strictement inférieurs à p). Alors, d'après les questions **Q17** et **Q18**, l'application $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) = b_p,$$

ce qui démontre bien l'existence d'une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Problème 2

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

Q20. Puisque x est un vecteur propre de $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ associé à la valeur propre λ, on a : $\lambda x = Ax$. Comparer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ième ligne de chaque membre de cette égalité matricielle donne bien :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j. \tag{4}$$

Q21. On reprend l'égalité de la question précédente avec $i = i_0$. On obtient, d'après l'inégalité triangulaire et le fait que $|x_j| \leqslant |x_{i_0}|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$|\lambda| \cdot |x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \cdot |x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|,$$

or $|x_{i_0}| > 0$ (sinon, toutes les coordonnées du vecteur x étant inférieures ou égales à x_{i_0} en valeur absolue, on aurait : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, ce qui est impossible puisqu'un vecteur propre est non nul), donc en divisant par $|x_{i_0}|$ on obtient :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

On a bien sûr $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$, donc :

$$|\lambda| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Q22. La matrice $A_n(\alpha,\beta)$ est symétrique et à coefficients réels, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et ses valeurs propres sont donc réelles.

Q23. D'après la question **Q21** on a, en inspectant la somme des coefficients de chaque ligne de $A_n(\alpha,\beta)$ (attention à la première et à la dernière) :

$$|\lambda| \leqslant \max\left\{|\alpha|+|\beta|, |\alpha|+2|\beta|, |\beta|+|\alpha|\right\}.$$

On a évidemment $|\beta| \leqslant 2|\beta|$ car $|\beta| \geqslant 0$, donc :

$$\lambda \leqslant |\alpha|+2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$.

Q24. Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la question **Q23** montre que toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$ vérifie : $|\lambda| \leqslant 2$, c'est-à-dire : $\frac{\lambda}{2} \in [-1,1]$. Or la fonction cosinus est surjective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$, donc pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$ il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

Q25. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1,2\}$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour calculer $\chi_{A_n}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n(0,1))$, on développe par rapport à la dernière colonne ou ligne ce déterminant et on obtient :

$$\chi_{A_n(0,1)}(\lambda) = \lambda\cdot\chi_{A_{n-1}(0,1)}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne : il égale $-\chi_{A_{n-2}(0,1)}(\lambda)$. Ceci vaut pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et on en déduit :

$$\chi_{A_n(0,1)} = X\cdot\chi_{A_{n-1}(0,1)} - \chi_{A_{n-2}(0,1)}.$$

En composant avec $2X$ cette relation, on obtient :

$$\forall n \geqslant 3,\quad U_n = 2X\cdot U_{n-1} - U_{n-2}.$$

Q26. Montrons par récurrence *forte* sur $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ que :

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \tag{5}$$

Pour $n = 1$, on a : $A_1(0,1) = (0)$, donc $\chi_{A_1} = X$, et : $U_1 = 2X$. On en déduit : $\forall \theta \in]0,\pi[$, $U_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)$. Or :

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\quad \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 2\cos(\theta),$$

d'où la proposition au rang $n = 1$.
À présent, soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, et supposons que (5) est vérifiée pour tout rang strictement inférieur à n. Alors, d'après la question précédente, pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on a :

$$U_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) U_{n-1}(\cos(\theta)) - U_{n-2}(\cos(\theta)),$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Or, d'après nos formules de trigonométrie préférées, nous avons pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

donc :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

d'où la proposition au rang n.
Ayant l'initialisation et l'hérédité, par récurrence forte sur n nous avons démontré :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \ \forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Les valeurs propres de $A_n(0,1)$ sont exactement les racines de son polynôme caractéristique. Or, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a :

$$\chi_{A_n(0,1)}(2\cos(\theta)) = U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Voyons à quelle condition sur θ cette quantité s'annule. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors :

$$U_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \exists j \in \mathbf{Z}, \ (n+1)\theta = j\pi \iff \exists j \in \mathbf{Z}, \ \theta = \frac{j\pi}{n+1}.$$

On en déduit que χ_{A_n} admet pour racines tous les réels de l'ensemble :

$$\left\{ 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1, n]\!] \right\}.$$

Notons que cet ensemble contient n éléments : en effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $\frac{j\pi}{n+1} \in [0, \pi]$, et le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, donc il y est injectif. Ceci prouve que les $2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$, pour $j \in [\![1, n]\!]$, sont distincts.
Ainsi nous avons là n racines de χ_{A_n} ; or χ_{A_n} est de degré n, en tant que polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre n : il s'agit donc de l'intégralité des racines de χ_{A_n}. On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{ 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1, n]\!] \right\}$.

Puisque $A_n(0,1)$ admet n valeurs propres distinctes, elles sont toutes simples, et on en déduit que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Q28. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$. On reprend l'égalité (4), en prenant soin de distinguer la première ligne (qui donne : $2\cos(\theta_j)x_1 = x_2$), la dernière ligne (qui donne : $2\cos(\theta_j)x_n = x_{n-1}$) et les lignes intermédiaires (qui nous donnent : $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $2\cos(\theta)x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$). D'où :

$$\begin{cases} & -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 &= 0, \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!], & x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} &= 0, \\ & x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n &= 0. \end{cases}$$

Q29. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de E. L'équation caractéristique de sa relation de récurrence linéaire est : $r^2 - 2\cos(\theta_j)r + 1 = 0$, qui est de discriminant :

$$4\left(\cos(\theta_j)\right)^2 - 4 = -4\left(\sin(\theta_j)\right)^2 < 0$$

car $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$. On en déduit que les racines de l'équation sont complexes, égales à :

$$\cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j) = e^{i\theta_j}, \text{ et } \cos(\theta_j) - i\sin(\theta_j) = e^{-i\theta_j},$$

donc la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 nous dit que $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ appartient à E si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_k = \alpha\cos(k\theta_j) + \beta\sin(k\theta_j).$$

En particulier, $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\left(\cos(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}}, \left(\sin(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}}\right\}$, et c'est un espace vectoriel de dimension 2.

Q30. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E$ une suite telle que $u_0 = u_{n+1} = 0$. D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_k = \alpha\cos(k\theta_j) + \beta\sin(k\theta_j).$$

L'hypothèse $u_0 = 0$ implique $\alpha = 0$, tandis que $u_{n+1} = 0$ équivaut à : $\beta\sin((n+1)\theta_j) = 0$. Or $\sin((n+1)\theta_j) = 0$ d'après la résolution de la question **Q27**, donc $u_{n+1} = 0$ si et seulement si $0 = 0$: c'est toujours vérifié.

On en déduit que l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ est :

$$\left\{\left(\beta\sin(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}} \mid \beta \in \mathbf{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\left(\sin(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}}\right\}.$$

Q31. D'après la question **Q28**, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\}$ est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} & -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 &= 0, \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!], & x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} &= 0, \\ & x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n &= 0. \end{cases}$$

c'est-à-dire, si l'on pose : $x_0 = x_{n+1} = 0$, si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0.$$

Donc x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ si et seulement si ses coordonnées sont les premiers termes d'une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de E vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. Nous avons déterminé l'ensemble de ces suites dans la question précédente : on en déduit que l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ est :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{(\sin(k\theta_j))_{k\in[\![1,n]\!]}\right\}.$$

Q32. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$. Si $\beta = 0$, alors $A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n$. Son unique valeur propre est α, et l'espace propre associé est $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Supposons donc $\beta \neq 0$ à présent. On a :

$$A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1).$$

On en déduit, après de menus calculs, que $x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\}$ est un vecteur propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à $\lambda \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$A_n(0,1)x = \frac{\lambda-\alpha}{\beta}x,$$

si et seulement si x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à $\dfrac{\lambda-\alpha}{\beta}$. Or nous avons démontré dans la question **Q27** que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1,n]\!]\right\}$. Donc λ est une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$ si et seulement s'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$\frac{\lambda-\alpha}{\beta} = 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

L'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ est donc :

$$\left\{\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

La question **Q31**, et la réflexion ci-dessus, montre alors que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, le sous-espace propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$ est :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{(\sin(k\theta_j))_{k\in[\![1,n]\!]}\right\}.$$

Partie II – Système différentiel

II.1 – Matrices par blocs

Q33. On a immédiatement : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix}$. Par hypothèse C et D commutent, donc $CD - DC = 0_n$, et on a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \tag{6}$$

Q34. Nous savons que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux, donc : $\det\left(\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}\right) = \det(D)\det(I_n) = \det(D)$. De même : $\det\left(\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD-BC)\det(D)$. Prendre le déterminant dans l'égalité (6) donne donc :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)\det(D) = \det(AD-BC)\det(D),$$

et si D est inversible, alors $\det(D) \neq 0$ et on peut diviser cette relation par $\det(D)$ pour obtenir :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD-BC). \tag{7}$$

Q35. Le polynôme caractéristique de $-D$ est non nul, donc admet un nombre fini de racines réelles non nulles. Notons λ_0 la plus petite d'entre elles en valeur absolue, et soit $p_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ un entier quelconque tel que $\frac{1}{p_0} < |\lambda_0|$ (il en existe, vu que : $\lim_{p_0 \to +\infty} \frac{1}{p_0} = 0$). Alors pour tout $p \geqslant p_0$, on a $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_0} < |\lambda_0|$, donc $\frac{1}{p}$ ne peut pas être une racine de χ_{-D}, et : $\chi_{-D}\left(\frac{1}{p}\right) \neq 0$. Ceci équivaut précisément à : $\det\left(D + \frac{1}{p}I_n\right) \neq 0$, et donc à l'inversibilité de la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$. On a donc bien montré que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.

Q36. Soit $p_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ un entier tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ soit inversible. Si D et C commutent, alors il est immédiat qu'il en est de même de $D + \frac{1}{p}I_n$ et C, donc d'après (7) on a :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(A\left(D + \frac{1}{p}I_n\right) - BC\right). \tag{8}$$

Or :

$$\lim_{p\to+\infty}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+\frac{1}{p}I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ et : } \lim_{p\to+\infty}\left(A\left(D+\frac{1}{p}I_n\right)-BC\right) = AD-BC$$

(c'est une évidence qui peut par exemple se démontrer coefficient par coefficient), et le déterminant est continu du fait de sa multi-linéarité sur un espace vectoriel de dimension finie, donc est séquentiellement continu, et on en déduit :

$$\lim_{p\to+\infty}\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+\frac{1}{p}I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right), \text{ et :}$$

$$\lim_{p\to+\infty}\det\left(A\left(D+\frac{1}{p}I_n\right)-BC\right) = \det(AD-BC).$$

Donc, quand $p\to+\infty$, l'identité (8) et l'unicité de la limite impliquent :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD-BC),$$

d'où le résultat même si D n'est pas inversible.

Q37. Pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$, on a :

$$\chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_{2n}-N) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ -M & \lambda I_n \end{pmatrix}\right),$$

et les matrices $-M$ et λI_n commutent. Donc, d'après les questions précédentes :

$$\forall\lambda\in\mathbf{C},\quad \chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_n\cdot\lambda I_n-(-I_n)\cdot(-M)) = \det(\lambda^2 I_n-M) = \chi_M(\lambda^2).$$

On en déduit que $\mu\in\mathbf{C}$ est une racine de χ_N si et seulement si μ^2 est une racine de χ_M, donc :

$$\mathrm{Sp}(N) = \{\mu\in\mathbf{C};\mu^2\in\mathrm{Sp}(M)\}.$$

Q38. Si x est un vecteur propre de M associé à μ^2, en particulier il est non nul, donc $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ est également non nul. De plus :

$$N\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q39. Si M est inversible, alors 0 n'est pas valeur propre de M, et donc n'est pas valeur propre de N d'après la question **Q37** : on en déduit que sous cette hypothèse, N est également inversible.
Si M est de plus diagonalisable, alors d'après le critère de diagonalisation, on a :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(\ker(M - \lambda I_n)) = n. \tag{9}$$

De plus, d'après la question **Q37**, si λ est une valeur propre de M alors ses deux racines carrées μ_λ et $-\mu_\lambda$ sont des valeurs propres de N (il existe bien deux racines carrées car $\lambda \neq 0$: par hypothèse M est inversible). La question **Q38** assure de plus que les applications linéaires :

$$\begin{cases} \ker(M - \lambda I_n) & \to & \ker(N - \mu_\lambda I_{2n}) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ \mu_\lambda x \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \ker(M - \lambda I_n) & \to & \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -\mu_\lambda x \end{pmatrix} \end{cases}$$

sont bien définies, et elles sont clairement injectives : si $\begin{pmatrix} x \\ \pm\mu_\lambda x \end{pmatrix} = 0_{2n}$ alors en particulier $x = 0_n$, donc leurs noyaux sont réduits au vecteur nul. Ceci démontre que pour toute valeur propre λ de M, on a :

$$\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) \geqslant \dim(\ker(M - \lambda I_n)), \text{ et } \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n})) \geqslant \dim(\ker(M - \lambda I_n))$$

(c'est par exemple une conséquence du théorème du rang). En conclusion :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) \geqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} 2\dim(\ker(M - \lambda I_n)) \overset{(9)}{=} 2n,$$

mais on a aussi : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) \leqslant 2n$, puisqu'il s'agit de la dimension de la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) \oplus \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))$ (les μ_λ sont tous distincts pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$), qui est incluse dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ de dimension $2n$. On en déduit :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) = 2n,$$

donc d'après le critère de diagonalisation la matrice N est diagonalisable.
En conclusion, si M est diagonalisable et inversible alors N l'est également.

II.2 – Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

Q40. Si x_1 et x_2 sont deux applications de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, alors :

$$\begin{cases} x_1'' &=& -2x_1 + x_2, \\ x_2'' &=& x_1 - 2x_2. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1' &=& x_1' \\ x_2' &=& x_2' \\ x_1'' &=& -2x_1 + x_2, \\ x_2'' &=& x_1 - 2x_2. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$$

donc le système étudié équivaut au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ et : } B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(-2,1) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbf{R}).$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 4.

Q41. Pour déterminer les valeurs propres de B, il suffit d'extraire les racines carrées complexes des valeurs propres de $A_2(-2,1)$ d'après la question **Q37**. Or, d'après la question **Q32** (ou par un calcul direct dans ce cas particulier très simple...), le spectre de $A_2(-2,1)$ est :

$$\left\{-2+2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -2+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\} = \{-3,-1\}.$$

On en déduit que l'ensemble des valeurs propres complexes de B est :

$$\{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, i, -i\}.$$

Ainsi B admet quatre valeurs propres distinctes et est d'ordre 4, donc est diagonalisable dans $\mathbf{C}$.

Q42. La question **Q32** (ou un calcul direct) permet de déterminer les sous-espaces propres de $A_2(-2,1)$:

$$\ker(A_2(-2,1)+I_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \text{ et } \ker(A_2(-2,1)+3I_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

D'après la question **Q38**, on a donc :

$$\ker(B-iI_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}\right\}, \ \ker(B+iI_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}\right\},$$

$$\ker(B-\sqrt{3}iI_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}, \text{ et } \ker(B+\sqrt{3}iI_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}$$

Donc, si l'on prend pour $P \in \mathrm{M}_4(\mathbf{C})$ la matrice de passage suivante entre la base canonique de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbf{C})$ et une base de vecteurs propres de B adéquate :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix}$$

la formule du changement de base implique : $B = PDP^{-1}$.

Q43. La matrice D est diagonale, donc bien sûr diagonalisable, de valeurs propres les coefficients diagonaux, et ses éléments propres sont les vecteurs de la base canonique de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbf{C})$. Un système fondamental de solutions de $Y' = DY$ est donc (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), où :

$$Y_1 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & e^{-i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{cases}, \quad Y_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & e^{i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Y_3 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & e^{-it}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \end{cases}, \quad Y_4 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & e^{it}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}.$$

Autrement dit : $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ vérifie $Y' = DY$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) + \gamma Y_3(t) + \delta Y_4(t) = \begin{pmatrix}\alpha e^{-i\sqrt{3}t}\\ \beta e^{i\sqrt{3}t}\\ \gamma e^{-it}\\ \delta e^{it}\end{pmatrix}.$$

Q44. Soient x_1 et x_2 deux applications à valeurs complexes et de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Si $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$, où P est la matrice de la question **Q42**, alors $Y' = P^{-1}X'$, et x_1 et x_2 sont solutions du système (2) de l'énoncé si et seulement si :

$$\begin{aligned} X' = BX \iff X' = PDP^{-1}X &\overset{[P^{-1}\times]}{\iff} P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \\ &\iff \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4,\ \forall t \in \mathbf{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix}\alpha e^{-i\sqrt{3}t}\\ \beta e^{i\sqrt{3}t}\\ \gamma e^{-it}\\ \delta e^{it}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

si et seulement si (après multiplication à gauche par P) il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbf{C}^4$ tel que :

$$\forall t\in\mathbf{R},\quad X(t)=P\begin{pmatrix}\alpha e^{-i\sqrt{3}t}\\ \beta e^{i\sqrt{3}t}\\ \gamma e^{-it}\\ \delta e^{it}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha e^{-i\sqrt{3}t}+\beta e^{i\sqrt{3}t}+\gamma e^{-it}+\delta e^{it}\\ -\alpha e^{-i\sqrt{3}t}-\beta e^{i\sqrt{3}t}+\gamma e^{-it}+\delta e^{it}\\ -i\sqrt{3}\alpha e^{-i\sqrt{3}t}+i\sqrt{3}\beta e^{i\sqrt{3}t}-i\gamma e^{-it}+i\delta e^{it}\\ i\sqrt{3}\alpha e^{-i\sqrt{3}t}-i\sqrt{3}\beta e^{i\sqrt{3}t}-i\gamma e^{-it}+i\delta e^{it}\end{pmatrix}$$

ce qui équivaut, étant donné que $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$, à l'existence de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbf{C}^4$ tel que :

$$\forall t\in\mathbf{R},\quad\left\{\begin{array}{rcl}x_1(t)&=&\alpha e^{-i\sqrt{3}t}+\beta e^{i\sqrt{3}t}+\gamma e^{-it}+\delta e^{it},\\ x_2(t)&=&-\alpha e^{-i\sqrt{3}t}-\beta e^{i\sqrt{3}t}+\gamma e^{-it}+\delta e^{it}.\end{array}\right.$$

On cherche à présent à quelle condition on a : $(x_1(0),x_2(0),x_1'(0),x_2'(0))=(1,0,0,0)$. Ces conditions équivalent au système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl}\alpha&+\beta&+\gamma&+\delta&=&1\\ -\alpha&-\beta&+\gamma&+\delta&=&0\\ -\sqrt{3}\alpha&+\sqrt{3}\beta&-\gamma&+\delta&=&0\\ \sqrt{3}\alpha&-\sqrt{3}\beta&-\gamma&+\delta&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rrrrcll}\alpha&+\beta&+\gamma&+\delta&=&1&\\ &&2\gamma&+2\delta&=&1&(L_2\leftarrow L_2+L_1)\\ -\sqrt{3}\alpha&+\sqrt{3}\beta&-\gamma&+\delta&=&0&\\ &&-2\gamma&+2\delta&=&0&(L_4\leftarrow L_4+L_3)\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rrrrcll}\alpha&+\beta&&&=&\frac{1}{2}&(L_1\leftarrow L_1-2L_2)\\ &&2\gamma&+2\delta&=&1&\\ -\sqrt{3}\alpha&+\sqrt{3}\beta&-\gamma&+\delta&=&0&\\ &&&4\delta&=&1&(L_4\leftarrow L_4+L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rrrcl}\alpha&+\beta&&=&\frac{1}{2}\\ &&\gamma&=&\frac{1}{4}\\ -\sqrt{3}\alpha&+\sqrt{3}\beta&&=&0\\ &&\delta&=&\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rrrcll}\alpha&+\beta&&=&\frac{1}{2}&\\ &&\gamma&=&\frac{1}{4}&\\ &2\sqrt{3}\beta&&=&\frac{\sqrt{3}}{2}&(L_3\leftarrow L_3+\sqrt{3}L_1)\\ &&\delta&=&\frac{1}{4}&\end{array}\right.$$

$$\iff\alpha=\gamma=\beta=\delta=\frac{1}{4}.$$

En conclusion, l'unique couple solution du système linéaire (2) de l'énoncé à vérifier les conditions initiales prescrites est défini par :

$$\forall t\in\mathbf{R},\quad\left\{\begin{array}{rcl}x_1(t)&=&\frac{1}{4}\left(e^{-i\sqrt{3}t}+e^{i\sqrt{3}t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{-it}+e^{it}\right)=\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}\cos(t),\\ x_2(t)&=&-\frac{1}{4}\left(e^{-i\sqrt{3}t}+e^{i\sqrt{3}t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{-it}+e^{it}\right)=-\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}\cos(t).\end{array}\right.$$