CCP— PSI — 2018

PROBLÈME 1

Partie I - Endomorphismes

Q1. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\Delta(X^k) = XkX^{k-1} = kX^k$. Et pour $k = 0$, $\Delta(X^0) = X \times 0 = 0 = 0X^0$.
Donc pour tout $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\Delta(X^k) = kX^k.$$

Q2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. En dérivant XP' comme un produit, on obtient :

$$\Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) = \Delta(XP' - P) = X(P' + XP'' - P') = X^2P''.$$

Q3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Q4. D'après Q1., on complète les colonnes de la matrice avec les coordonnées, pour $k \in [\![0;n]\!]$, de $\Delta(X^k)$ sur la base canonique. On obtient la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Q5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après Q2., $(\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2P''$.
Donc $(\Delta^2 + (a-1)\Delta)(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\Delta(P) = X^2P'' + aXP' = \Phi(P)$. D'où :

$$\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta.$$

Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ donc Δ^2 également. Par combinaison linéaire :

$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].$$

Q6. Avec le même raisonnement, en remplaçant $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\Phi \text{ induit un endomorphisme } \Phi_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n.$$

Q7. Dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de Δ_n est diagonale. Ce qui est donc le cas de la matrice de Δ_n^2. D'après l'égalité $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$, la matrice de Φ_n dans la base canonique est diagonale par combinaison linéaire et :

$$\Phi_n \text{ est diagonalisable.}$$

Q8. On remarque que $\varphi = \Phi + b\,\mathrm{Id}$. Φ et Id induisent des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. Par combinaison linéaire :

$$\varphi \text{ induit un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].$$

D'après les égalités précédentes (Q5.), on obtient :

$$\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\,\mathrm{Id},$$

où Id désigne ici l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q9. D'après Q4., la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale de coefficient diagonal $\delta_k = k$ pour $k \in [\![0;n]\!]$, souvent notée $\mathrm{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$.
D'après Q9., $\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\,\mathrm{Id}$, donc la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\delta_k^2 + (a-1)\delta_k + b = k^2 + (a-1)k + b$ pour $k \in [\![0;n]\!]$, soit $\mathrm{diag}(b, 1^2 + (a-1) \times 1 + b, 2^2 + (a-1)2 + b, \dots, n^2 + (a-1)n + b)$.

Q10. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \ker(\varphi_n) &\iff \varphi_n(P) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_n(X^k) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \left(k^2 + (a-1)k + b\right) X^k = 0 \text{ d'après Q9.} \\
&\iff \forall\, k \in [\![0;n]\!] \ ,\ a_k(k^2 + (a-1)k + b) = 0 \\
&\iff \forall\, k \in [\![0;n]\!] \setminus \{m_1, m_2\} \ ,\ a_k = 0 \\
&\iff P = a_{m_1} X^{m_1} + a_{m_2} X^{m_2}
\end{aligned}$$

D'où $\ker(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$.

Remarque : on pouvait également déterminer le noyau de la matrice de φ_n et revenir aux polynômes à partir des coordonnées trouvées.

Q11. De même, on obtient :

$$\ker(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(X^m)$$

Q12. De même, si l'équation (1) n'admet pas de racine entière, $\ker(\varphi_n) = \{0\}$.

Si $P \in \ker(\varphi) \setminus \{0\}$, notons $n = \deg(P)$. Ainsi $\varphi(P) = \varphi_n(P) = 0$ et $P \in \ker(\varphi_n)$.
Ainsi $\ker(\varphi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(\varphi_n)$. D'où :

$\dim \ker(\varphi) \in [\![0;2]\!]$ et est égale au nombre de racines entières de l'équation (1).

Partie II - Une équation différentielle

Q13. (2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus. Comme la fonction $x \longmapsto x^2$ ne s'annule pas sur I :

l'ensemble des solutions de (2) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.

De même sur J.

Q14. Soit y une solution de (2) sur I. Posons $g = y \circ \exp$. g est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de exp, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I, et de y, définie et deux fois dérivable sur I. On a alors :
$g' = y' \circ \exp \times \exp$ et $g'' = y'' \circ \exp \times \exp^2 + y' \circ \exp \times \exp$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) &= y''(\exp(x)) \times \exp^2(x) + a\ y'(\exp(x)) \times \exp(x) + b\ y(\exp(x)) \\
&= y''(t)t^2 + ay'(t)t + by(t) \text{ en posant } \exp(x) = t \in I \\
&= 0 \text{ car } y \text{ est solution de (2).}
\end{aligned}$$

Ainsi $g = y \circ \exp$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (3).

Q15. Posons $h = g \circ \ln$. h est définie et deux fois dérivable sur I par composition de ln, définie et deux fois dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de g, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in I$:
$h'(x) = g'(\ln(x))\dfrac{1}{x}$ et $h''(x) = g''(\ln(x))\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}g'(\ln(x))$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } x^2h''(x) + axh'(x) + bh(x) &= g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) \text{ en posant } \ln(x) = t \\
&= 0 \text{ car } g \text{ est solution de (3).}
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } g \circ \ln \text{ est solution sur } I \text{ de l'équation (2).}$$

Q16. ▶ On commence par résoudre (3), équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. On associe l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1.
Ainsi les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont $u : t \longmapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
D'après Q15. et Q16., les solutions de (2) sur I sont

$$y : x \longmapsto u(\ln(x)) = (\lambda \ln(x) + \mu)\frac{1}{x}\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

▶ De même, avec $2i$ et $-2i$ comme racines de l'équation caractéristique, les solutions de (3) sont $u : t \longmapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (2) sur I sont

$$y : x \longmapsto u(\ln(x)) = \lambda \cos(2\ln(x)) + \mu \sin(2\ln(x))\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Q17. On procède de même qu'en Q14. avec :
$h' = -y' \circ (-\exp) \times \exp$ et $h'' = y'' \circ (-\exp) \times \exp^2 - \exp \times y' \circ (-\exp)$.

On obtient alors $h'' - 4h = 0$ car y est solution de (2).

$$\text{Donc si } y \text{ est solution de (2) sur } J, \text{ alors } h = y \circ (-\exp) \text{ est solution de (3) sur } \mathbb{R}.$$

Q18. L'équation caractéristique associée à (3) est $r^2 - 4 = 0$, de racines 2 et -2.
Les solutions de (3) sont donc $u : t \longmapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$.
D'après Q14. et Q15., les solutions de (2) sur I sont donc $y_I : x \longmapsto \lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2}$.

De même que Q15., on prouve que si g est solution de (3) sur $\mathbb{R}$, alors $x \longmapsto g(\ln(-x))$ est solution de (2) sur I. Ainsi, les solutions de (2) sur J sont $y_J : x \longmapsto \alpha x^2 + \dfrac{\beta}{x^2}$.

On procède alors à un recollement des solutions : on cherche les conditions sur $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ pour avoir

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0^-} y_J(x) &=& \lim\limits_{x\to 0^+} y_I(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y_J'(x) &=& \lim\limits_{x\to 0^+} y_I'(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y_J''(x) &=& \lim\limits_{x\to 0^+} y_I''(x) \end{array}\right. \quad \text{avec des limites finies.}$$

Pour des limites finies pour y_I et y_J, on obtient $\beta = 0$ et $\mu = 0$. Dans ce cas, ces limites sont alors égales à 0.
Ainsi $y_I : x \longmapsto \lambda x^2$ et $y_J : x \longmapsto \alpha x^2$.

D'où $y_I'(x) = 2\lambda x$ et $y_J'(x) = 2\alpha x$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} y_J'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y_I'(x) = 0$.
Enfin, $y_I''(x) = 2\lambda$ et $y_J''(x) = 2\alpha$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} y_J''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y_I''(x) \iff \lambda = \alpha$.
Les fonctions y définies sur $I \cup J$ par $x \longmapsto \lambda x^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 2\lambda$, qui consiste à prendre

$$y : x \longmapsto \lambda x^2 \text{ définie sur } \mathbb{R},$$

est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on vérifie qu'elle est bien solution de (2) sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Une équation de Bessel

Q19. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0\ /\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\} \quad \text{et} \quad R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Q20. J_0 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et se dérive terme à terme.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in]-R,R[, \quad J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \\
J_0'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} \\
J_0''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \\
x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k \\
x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) &= c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sous réserve que $R > 0$), comme J_0 est solution de (4), on en déduit :

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2, \quad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2}.$$

Comme, de plus, $c_0 = 1$ par hypothèse, on montre facilement par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}.$$

Q21. On s'intéresse à la série entière $\sum c_{2k} x^{2k}$. Une série entière converge toujours pour $x = 0$.
Prenons x dans $\mathbb{R}^*$ et notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad u_k(x) = c_{2k} x^{2k}$. Ainsi, $u_k(x) \neq 0$ et

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1.$$

Donc le critère de d'Alembert permet de conclure que cette série entière converge pour tout réel x et que son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

On a donc prouvé que la somme de cette série entière, appelée J_0 dans l'énoncé, est une solution de (4) sur $\mathbb{R}$.

Q22. J_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur le segment $[0,r]$ et donc bornée sur ce segment.
J_0 n'est pas la fonction nulle (par unicité du développement en série entière), donc si (J_0, f) est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0,r[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = aJ_0$ et f est ainsi bornée sur $]0,r[$ et donc au voisinage de 0.

Q23. Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières (absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\forall\, x \in]-R_\alpha, R_\alpha[\cap]-R_\beta, R_\beta[, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right) x^n.$$

Or, cette somme vaut 1 par hypothèse donc, par unicité d'écriture d'une série entière, on a :

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Comme $\alpha_0 = 1$ par hypothèse, on obtient :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Q24. Puisque $0 < r < R_\alpha$, par définition du rayon de convergence, la suite $(\alpha_k r^k)_k$ est bornée, donc :

$$\exists\, M > 0 \;/\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k r^k| \leqslant M \quad i.e. \quad |\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, H_k l'assertion : « $|\beta_k| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ ».

— Initialisation : a relation (5) fournit $\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = 0$. Donc $\beta_1 = -\alpha_1$ et $|\beta_1| = |\alpha_1| \leqslant \dfrac{M}{r}$. Cela montre H_1.

— Hérédité : Prenons k dans $\mathbb{N}^*$ tel que H_1, ..., H_k soient vraies et montrons que H_{k+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
|\beta_{k+1}| &= \left| -\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k+1-j}\ \beta_j \right| \qquad (\text{car } \alpha_0 = 1)\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k} |\alpha_{k+1-j}|\ |\beta_j|\\
&\leqslant \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{r^{k+1-j}} \times \frac{M(M+1)^{j-1}}{r^j} \qquad (\text{d'après Q.24 et l'hyp. de récurrence})\\
&\leqslant \frac{M}{r^{k+1}} + \frac{M^2}{r^{k+1}} \left| \frac{(M+1)^k - 1}{(M+1)-1} \right|\\
&\leqslant \frac{M(M+1)^k}{r^{k+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie et l'on a établi le résultat souhaité par récurrence.

Q26. On déduit de la question précédente :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad |\beta_k x^k| \leqslant \frac{M}{M+1} \left| \frac{(M+1)x}{r} \right|^k.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent d'affirmer que si $\left| \dfrac{(M+1)x}{r} \right| < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{(M+1)x}{r} \right)^k$ converge et donc que la série $\sum \beta_k x^k$ est absolument convergente. La série $\sum \beta_k x^k$ est donc absolument convergente pourvu que $|x| \leqslant \dfrac{r}{M+1}$; son rayon de convergence vérifie donc $R_\beta \geqslant \dfrac{r}{M+1} > 0$.

Q27. On note : $\forall\, x \in]0,r[$, $y(x) = \lambda(x)J_0(x)$avec λ fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,r[$. Ainsi, y est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,r[$. Comme J_0 est solution de (4), on obtient

$$\forall\, x \in]0,r[: \; x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = x^2\lambda''(x)J_0(x) + 2x^2\lambda'(x)J_0'(x) + x\lambda'(x)J_0(x).$$

De plus , en notant $\forall\, x \in]0,r[$, $h(x) = x\lambda'(x)J_0^2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in]0,r[: \; h'(x) &= \lambda'(x)J_0^2(x) + x\lambda''(x)J_0^2(x) + x\lambda'(x)\ 2J_0(x)J_0'(x)\\
&= \frac{J_0(x)}{x}\ \left(x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)\right).
\end{aligned}$$

- Il est donc clair que si y est solution de (4) sur $]0,r[$ alors h est de dérivée nulle sur $]0,r[$.
- Réciproquement, supposons que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0,r[$. Notons $g : x \longmapsto x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)$.
  Supposons qu'il existe $x_0 \in]0,r[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Par continuité, g serait non nulle sur un sous-intervalle de $]0,r[$ centré en x_0 et J_0 serait donc nulle sur cet intervalle. Comme J_0 est

solution de $u''+\dfrac{1}{x}u'+u=0$ sur $]0,r[$, J_0 serait identiquement nulle sur $]0,r[$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz comme unique solution de (4) s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0. Elle serait donc nulle en 0 par continuité. Cela contredirait la définition de J_0 ($c_0=1$). Donc g est nulle et y est solution de (4) sur $]0,r[$.

Q28. Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, J_0^2 est somme d'une série entière de rayon $+\infty$. De plus, $J_0^2(0)=1$.

Q29. Cherchons une fonction λ et un réel $r>0$ tels que $\forall\, x\in]0,r[:\ xJ_0^2(x)\lambda'(x)=1$.
La question **Q27.** nous assurera alors que $(x\longmapsto\lambda(x)J_0(x))$ est solution de (4) sur $]0,r[$.
La question **Q28.** permet d'appliquer le paragraphe sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0 à J_0^2.
Il existe donc une série entière $\sum \beta_k x^k$ de rayon $r>0$ et telle que $\beta_0=1$ qui vérifie

$$\forall\, x\in]0,r[:\ J_0^2(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k x^k\right)=1,\quad\therefore\quad xJ_0^2(x)\left(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k x^{k-1}\right)=1.$$

En prenant

$$\forall\, x\in]0,r[:\ \lambda(x)=\ln(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k\frac{x^k}{k},$$

on obtient bien

$$\forall\, x\in]0,r[:\ xJ_0^2(x)\lambda'(x)=1.$$

Notons

$$\forall\, x\in]0,r[:\ \eta(x)=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k\frac{x^k}{k}\right)\times J_0(x).$$

Par produit de Cauchy, η est la somme d'une série entière de rayon $R_\eta>0$ et, d'après la question **Q27.**,

$$\big(J_1: x\longmapsto \eta(x)+\ln(x)\ J_0(x)\big)\text{ est solution de (4) sur }]0,R_\eta[.$$

Q30. Puisque $J_0(0)=1$, la fonction $J_1=\eta+J_0\times\ln$ n'est pas bornée sur $]0,R_\eta[$. D'après la question **Q22.**, la famille (J_0,J_1) est donc libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,R_\eta[$ et l'on a une base de solutions de (4). On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) sur $]0,R_\eta[$ est

$$\left\{aJ_0+b(\eta+J_0\times\ln)\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}(J_0,\eta+J_0\times\ln).$$

PROBLÈME 2

Q31. La variable aléatoire X admet une espérance. De fait, c'est évident si $X(\Omega)$ est fini. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, et si $\{x_0,x_1,\dots,\}$ en est une énumération, l'espérance de X est, par définition, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)$, pourvu que cette série soit absolument convergente.
Or, $|x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)|\leqslant\mathbb{P}(X=x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\sum\mathbb{P}(X=x_n)$ est convergente, donc X admet bien une espérance en vertu du théorème de comparaison. Le résultat s'étend immédiatement à toute variable aléatoire bornée (par majoration, ou en se ramenant à $[-1,1]$ par normalisation) ; cela sera utile par la suite.

Q32. **Inégalité de Markov.** *Si Y est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors*

$$\forall\alpha>0:\ \mathbb{P}(Y\geqslant\alpha)\leqslant\frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha}.$$

Démonstration. Cas où $Y(\Omega)$ est fini. La validité des manipulations sur les sommes finies est immédiate.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y) &= \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y<a}} y\,\mathbb{P}(Y=y) + \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\geqslant a}} y\,\mathbb{P}(Y=y)\\ &\underset{[Y(\Omega)\subset\mathbb{R}_+]}{\geqslant} \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ y\geqslant a}} y\,\mathbb{P}(Y=y) \geqslant \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\geqslant a}} a\,\mathbb{P}(Y=y) = a\,\mathbb{P}(Y\geqslant a).\end{aligned}$$

Cas où $Y(\Omega)$ est infini dénombrable. Le formalisme est un peu différent, mais la démonstration est intrinsèquement la même. On peut par exemple utiliser les fonctions indicatrices et la croissance de l'espérance :

$$Y = Y\mathbb{1}_{(Y<a)} + Y\mathbb{1}_{(Y\geqslant a)} \geqslant 0 + a\mathbb{1}_{(Y\geqslant a)} \quad \therefore \quad \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}\left(a\mathbb{1}_{(Y\geqslant a)}\right) = a\,\mathbb{P}(Y\geqslant a).$$

□

Q33. Comme X admet une espérance, il en va de même de $|X|$, à qui l'on peut appliquer l'inégalité de Markov, puisqu'elle est positive.

Q34. Le fait que $tn > 0$, la croissance de l'exponentielle, puis l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire positive bornée (donc admettant une espérance) e^{tnS_n}, donnent

$$\mathbb{P}(S_n\geqslant\varepsilon) = \mathbb{P}(tnS_n \geqslant tn\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right)}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Or, $\mathrm{e}^{tnS_n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_i}$ et les variables aléatoires e^{tX_i} sont bornées, donc admettent une espérance. Alors, l'indépendance des X_i donne

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right) = \left[\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right]^n.$$

Q35. De $g_a(x) = P(x) - a^x$ avec $P\in\mathbb{R}_1[X]$, on tire que g_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $g_a''(x) = -(\ln a)^2 a^x < 0$, ce qui montre que g_a' est strictement décroissante. Comme

$$g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0 = a - a = g_a(1),$$

le théorème de Rolle entraîne que g_a' s'annule au moins une fois sur $]-1,1[$. Comme g_a' est strictement décroissante, g_a' s'annule une seule fois et est d'abord positive, puis négative. Ainsi, il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que g_a est strictement croissante sur $[-1,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,1]$. En particulier, g_a est positive sur $[-1,1]$. Notons que l'hypothèse $a>0$ suffit.

Q36. Soit $t>0$. En prenant $a = \mathrm{e}^t > 1$, l'inégalité $g_a(x)\geqslant 0$ donne

$$\frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{tx} \geqslant 0,$$

d'où l'inégalité demandée en ajoutant e^{tx} des deux côtés.

Q37. Par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que $\mathbb{E}(X)=0$, l'inégalité de la question 36 donne

$$\mathrm{e}^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+X}{2}\mathrm{e}^{t} = \operatorname{ch} t + (\operatorname{sh} t)X \quad\therefore\quad \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t + (\operatorname{sh} t)\,\mathbb{E}(X) = \operatorname{ch} t.$$

Q38. Si $k \geqslant 1$, on a

$$(2k)! = k! \prod_{j=1}^{k}(k+j) \geqslant k! \prod_{j=1}^{k} 2 = 2^k k!,$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $k = 0$ $(1 = 1)$. En en prenant l'inverse, puis en multipliant par la quantité positive t^{2k}, il vient $\dfrac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{t^2}{2}\right)^k$.

En utilisant alors la question 37, il vient, en utilisant les développements en série entière du cosinus hyperbolique et de l'exponentielle, lesquels sont de rayon de convergence infini :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Q39. Posons $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$. Alors, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\varphi'(t) = n(t-\varepsilon)\varphi(t)$ est du signe de $t - \varepsilon$. Il s'ensuit que φ admet un minimum en ε et que ce minimum vaut $\varphi(\varepsilon) = \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Q40. Les questions précédentes donnent une majoration de $\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon)$ valable pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \underset{[Q.34]}{\leqslant} \mathrm{e}^{-nt\varepsilon}\, \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^n \underset{[Q38]}{\leqslant} \mathrm{e}^{-nt\varepsilon} \times \mathrm{e}^{\frac{nt^2}{2}}.$$

En particulier, pour $t = \varepsilon$, choix optimal en vertu de la question 39, il vient $\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

Les v.a. $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i (elles sont à valeurs dans $[-1,1]$ et indépendantes). Il s'ensuit que l'on peut appliquer la majoration ci-dessus à $-S_n$, ce qui donne $\mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$. Alors,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \leqslant -\varepsilon) + \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Q41. La croissance des mesures de probabilité et la question 40 donnent la majoration

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Le théorème de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$ assurent alors la convergence de la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$.

Q42. $\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\} = S_m^{-1}(]-\infty,-\varepsilon[) \cup S_m^{-1}(]\varepsilon,+\infty[)$ est la réunion de deux événements, donc un événement. Alors, B_n est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.

Par ailleurs, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \displaystyle\sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}\right)$, reste d'une série convergente d'après la question 41. Comme la suite $(B_n)_n$ est décroissante, il s'ensuit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

Q43. Posons pour plus de clarté $B_n(\varepsilon) = B_n$. On peut écrire

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n\colon |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n(1/k)}$$

donc Ω_k est une réunion dénombrable d'événements et donc un événement. On peut par ailleurs écrire

$$A = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n\colon |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k,$$

ce qui montre que A est un événement.

Q44. En reprenant l'expression de Ω_k obtenue à la question 43, le passage au complémentaire donne $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(1/k)$ et en appliquant ce que l'on a montré à la question 42, on obtient $\mathbb{P}\left(\overline{\Omega_k}\right) = 0$, d'où $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$.

Enfin, $\left(|S_m| \leqslant \dfrac{1}{k}\right) \supset \left(|S_m| \leqslant \dfrac{1}{k+1}\right)$, ce qui entraîne que la suite d'événements $(\Omega_k)_k$ est décroissante. On peut alors conclure :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\Omega_k) = 1.$$

Autrement dit, $(S_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Ce résultat est la *loi forte des grands nombres.*