

# CCP2017 - PSI

## Un corrigé

### Problème 1

#### Partie I - Un exemple en dimension 2

1. On a

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + t^2$$

Les valeurs propres étant les racines de  $\chi_A$ ,

$$\text{Sp}(A) = \{it, -it\}$$

2. On vérifie par calcul que

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$R = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de  $R$  sont clairement orthogonales. Leur norme vaut 1 (car  $(1-t^2)^2 + 4t^2 = (1+t^2)^2$ ) et donc  $R$  est orthogonale. Son déterminant étant égal à 1, on en déduit que

$$R \in SO_2(\mathbb{R})$$

où  $SO_n(\mathbb{R})$  est le groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$ .

3. Un calcul permet de vérifier que

$$(I_2 + R_\theta)^{-1} = \frac{1}{2(1 + \cos(\theta))} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1 + \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le calcul métriciel donne alors

$$M = \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

#### Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

4. On suppose  $BC = CB$ . En multipliant à gauche et droite par  $C^{-1}$ , on obtient immédiatement

$$C^{-1}B = BC^{-1}$$

5. On a

$${}^t(AX)\bar{X} = {}^t(\lambda X)\bar{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

et par ailleurs, en utilisant le fait que  $A$  est réelle,

$${}^t(AX)\bar{X} = {}^t X^t A \bar{X} = -{}^t X A \bar{X} = -{}^t X \overline{(A\bar{X})} = -\bar{\lambda} {}^t X \bar{X} = -\bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Comme  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$  (car  $X$  est non nul) on a  $\lambda = -\bar{\lambda}$  ce qui prouve que  $\lambda$  est imaginaire pur. On a ainsi

$$\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$$

6. En particulier,  $-1$  n'est pas valeur propre de  $A$  et  $I_n + A$  est donc inversible. Comme  $I_n - A$  et  $I_n + A$  commutent, la question 4 donne

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

On a de plus (puisque  ${}^t(MN) = {}^tN{}^tN$  et  ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$ )

$$R^tR = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

Comme  $(I_n - A)$  et  $(I_n + A)$  commutent, on conclut que  $R^tR = I_n$  et donc

$$R \in O_n(\mathbb{R})$$

7. Le déterminant étant un morphisme multiplicatif,

$$\det(R) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)} = \frac{\chi_A(1)}{(-1)^n \chi_A(-1)}$$

On note  $k$  la multiplicité de  $0$  comme valeur propre de  $A$  (éventuellement nulle). On a donc l'existence d'un polynôme  $Q$  tel que  $\chi_A = X^k Q$  et  $Q$  est sans racine réelle. On a alors  $Q(1)$  et  $Q(-1)$  de même signe et  $\det(R)$  est du signe de  $(-1)^{n-k}$ . Or,  $n - k$  est le degré de  $Q$  et est donc pair (car  $Q$  est un polynôme réel sans racine réelle).  $\det(R)$  est donc positif.

Comme  $R$  est une matrice orthogonale,

$$\det(R) = 1$$

8. On a

$${}^tA = {}^t(I_n - R){}^t(I_n + R)^{-1} = (I_n - {}^tR)(I_n + {}^tR)^{-1} = (I_n - R^{-1})(I_n + R^{-1})^{-1}$$

Un calcul simple montre que

$$(I_n + R)(I_n - R^{-1}) = I_n + R - R^{-1} - I_n = (R - I_n)(I_n + R^{-1})$$

en multipliant par l'inverse de  $(I_n + R^{-1})$  à droite et l'inverse de  $(I_n + R)$  à gauche, on en déduit que

$${}^tA = (I_n + R)^{-1}(R - I_n) = -A$$

ce qui montre que  $A$  est antisymétrique.

9. Dans une base orthonormée directe de premier vecteur orientant et dirigeant l'axe, on connaît la matrice de la rotation  $r$ . En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée, on a  $P \in O_3(\mathbb{R})$  (changement de b.o.n.) et

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

Posons  $t = \tan(\theta/2)$  (qui existe puisque  $\theta \neq 0[\pi]$ ) et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $C = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ . Un calcul par blocs montre que  $I_3 - B$  est inversible et que

$$(I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1} \end{pmatrix}$$

puis que

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1}(I_2 - C) \end{pmatrix}$$

Avec la première partie, on obtient (il faut changer  $B$  en  $-B$  et donc  $t$  en  $-t$  et  $(I_3 + B)^{-1}$  et  $(I_3 - B)$  commutent)

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Or,  $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) = \cos(\theta)$  et  $\frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta)$  et donc

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = P^{-1}RP$$

On en déduit que

$$R = P(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B)P^{-1} = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A) \text{ avec } A = PBP^{-1}$$

On conclut en remarquant que puisque  $B$  est antisymétrique et  $P$  orthogonale,  $A$  est antisymétrique.

## Problème 2

### Partie 1 : résultats préliminaires

10. Une intégration par partie (on dérive  $f$  et on primitive  $\cos(nt)$  et on a bien deux fonctions de classe  $C^1$  sur le segment)

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \left[ \frac{\sin(nt)}{n} f(t) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin(nt) f'(t) dt$$

Le terme entre crochets est nul. On majore l'autre grossièrement :

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt$$

Le majorant étant de limite nulle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0$$

11. Par théorème fondamental appliqué à la fonction continue  $\varphi$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , la primitive cherchée est

$$\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$$

$\varphi$  étant  $2\pi$ -périodique,  $\int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt$  ne dépend pas de  $x$  et par hypothèse, sa valeur en 0 est nulle. On en déduit que  $\Phi$  est aussi  $2\pi$ -périodique.

Comme  $\Phi$  est continue, elle est bornée sur le segment  $[0, 2\pi]$ . Etant  $2\pi$ -périodique, elle est aussi bornée sur  $\mathbb{R}$  (avec la même borne que sur  $[0, 2\pi]$ ).

On peut alors utiliser une intégration par partie comme plus haut.

$$\int_a^b f(t) \varphi(nt) dt = \left[ \frac{1}{n} f(t) \Phi(nt) \right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \Phi(nt) dt$$

En notant  $M = \|\Phi\|_\infty$  (qui existe) on a alors

$$\left| \int_a^b f(t) \varphi(nt) dt \right| \leq \frac{M}{n} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{M}{n} \int_a^b |f'(t)| dt$$

Là encore le majorant est de limite nulle et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(nt) dt = 0$$

12. On a

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t)\varphi(nt) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (h(t) - g(t))\varphi(nt) dt + \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi(nt) dt$$

On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(t)\varphi(nt) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |h(t) - g(t)| \cdot |\varphi(nt)| dt + \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi(nt) dt \right|$$

Comme  $|h - g|$  est majorée par  $\varepsilon$  sur  $[\alpha, \beta]$ , on en déduit alors que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(t)\varphi(nt) dt \right| \leq \|\Phi\|_{\infty} |\beta - \alpha| \varepsilon + \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi(nt) dt \right|$$

Soit alors  $f$  continue sur  $[a, b]$ . On va montrer le résultat demandé en revenant à la définition des limites (comme nous y incite le début de la question). On se donne donc  $\varepsilon > 0$ . Par théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction polynomiale  $P$  telle que  $\|f - P\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon$ . La question précédente donne une constante  $M$  telle que

$$\left| \int_a^b f(t)\varphi(nt) dt \right| \leq M|b - a|\varepsilon + \left| \int_a^b P(t)\varphi(nt) dt \right|$$

La question 11 montre que pour  $n$  assez grand, le second terme est en module plus petit que  $\varepsilon$  pour  $n$  assez grand. C'est à dire qu'il existe  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_a^b f(t)\varphi(nt) dt \right| \leq (M|b - a| + 1)\varepsilon$$

Comme  $(M|b - a| + 1)$  est une constante, on a donc prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt) dt = 0$$

Dans le cas où  $f$  n'est que continue par morceaux, il existe un nombre fini de morceaux  $] \alpha, \beta [$  tels que  $f$  restreinte à  $] \alpha, \beta [$  soit continue et prolongeable en une fonction  $\tilde{f}$  continue sur  $[\alpha, \beta]$ .

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(t)\varphi(nt) dt = 0$$

Remplacer  $\tilde{f}$  par  $f$  ne change pas l'intégrale. On obtient le résultat pour  $f$  sur  $[a, b]$  en faisant la somme sur tous les morceaux.

13. On a  $\sin^2(nt) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2nt))$  et donc

$$\int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \cos(2nt) dt$$

Comme  $x \mapsto \cos(2x)$  est continue,  $2\pi$ -périodique et d'intégrale nulle sur  $[0, 2\pi]$ , le second terme est de limite nulle avec ce qui précède et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt$$

## Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

14.  $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$  étant continue sur  $[a, +\infty[$ , le seul problème est celui au voisinage de  $+\infty$ . Comme  $F$  est bornée, on a  $\frac{F(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et par comparaison aux fonctions de Riemann,  $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  et finalement sur  $[a, +\infty[$ . A fortiori, on a existence de

$$\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$$

$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$  est continue sur  $[a, +\infty[$  et le seul problème est donc celui au voisinage de  $+\infty$ . On revient ici à la définition de l'existence de l'intégrale (et on ne cherche pas à prouver l'intégrabilité). Par intégration par parties (et comme  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  par théorème fondamental)

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t} dt = \left[ \frac{F(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2} dt$$

Comme  $F$  est bornée, le terme entre crochets admet une limite (nulle) quand  $b \rightarrow +\infty$ . On a vu en début de question que la seconde intégrale admet aussi une limite quand  $b \rightarrow +\infty$ . On a donc (existence et valeur)

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$$

15.  $t \mapsto \sin(t)/t$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Le seul problème est au voisinage de  $+\infty$ . Comme  $x \mapsto \int_0^x \sin(t) dt = 1 - \cos(x)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , on peut utiliser la question précédente pour justifier que l'intégrale existe au voisinage de  $\infty$  et donc sur  $\mathbb{R}^+$ .

Comme  $t \mapsto 1 - \cos(t)$  est une primitive de  $\sin$  sur  $\mathbb{R}^+$ , une intégration par partie (on travaille sur un segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  où il n'y a pas de problème pour celle-ci) donne

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Comme  $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$ , on a donc

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + 2 \int_a^b \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt$$

Dans l'intégrale, on pose  $u = t/2$  (changement de variable affine), on a alors

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + 2 \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$$

Le membre de gauche admet une limite quand  $a \rightarrow 0$  et quand  $b \rightarrow +\infty$ . Il en va de même du crochet (de limite nulle, en particulier car  $1 - \cos(t) \sim t^2/2$  au voisinage de 0) et en passant à la limite, on obtient l'existence de l'intégrale de  $\sin^2(u)/u^2$  sur  $\mathbb{R}^+$  avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

16. On utilise le résultat de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t)e^{-xt}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|$ . Le majorant est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Le théorème s'applique et indique que  $\mathcal{L}(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

17. On doit maintenant utiliser le théorème de régularité.

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t)e^{-xt}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de dérivée  $k$ -ième  $x \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, t \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in [a, b], \forall t \in \mathbb{R}^+, |(-t)^k f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|t^k e^{-at}$ .  $t \mapsto t^k e^{-at}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , de limite nulle en  $+\infty$  (car  $a > 0$ ) et donc bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . Le majorant est donc intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  (puisque continu sur  $\mathbb{R}^+$  et  $O(f(t))$  au voisinage de  $+\infty$ , on n'a donc pas besoin du caractère borné de  $f$ ).

Le théorème s'applique et indique que  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}(f)^{(k)} : x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k f(t)e^{-xt} dt$$

Pour la limite de  $\mathcal{L}(f)$  en  $+\infty$ , on va utiliser le théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle. On se donne donc une suite  $(x_n)$  de limite infinie. On peut sans perte de généralité supposer que  $x_n \geq 1$  pour tout  $n$  (puisque  $x_n \rightarrow +\infty$ ). On pose alors  $g_n : t \mapsto f(t)e^{-x_n t}$ .

- $\forall n, g_n \in C^0(\mathbb{R}^+)$ .
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, g_n(t) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et la suite  $(g_n)$  est donc simplement convergente vers 0 sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\forall n, \forall t \in \mathbb{R}^+, |g_n(t)| \leq |f(t)|e^{-t}$  et le majorant est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  (continu sur  $\mathbb{R}^+$  et dominé par  $f$  au voisinage de  $+\infty$ ).

On en déduit que  $\mathcal{L}(f)(x_n) \rightarrow 0$  et, par caractérisation séquentielle,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

18. (a) La fonction  $f$  proposée est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . On peut alors utiliser ce qui précède.  $\mathcal{L}(f)$  est ainsi de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-xt} dt$$

On en déduit que

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 + 1)f(t)e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

(b) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions de classe  $C^2$  telles que  $\alpha' \cos + \beta' \sin$ . Posons alors  $g = \alpha \cos + \beta \sin$ . On a alors (avec l'hypothèse faite sur  $\alpha, \beta$ )

$$g' = -\alpha \sin + \beta \cos, g'' = -\alpha \cos - \beta \sin - \alpha' \sin + \beta' \cos$$

et ainsi

$$g'' + g = -\alpha' \sin + \beta' \cos$$

Pour que  $\alpha$  et  $\beta$  conviennent, il suffit donc que  $\begin{cases} \alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x) \sin(x) + \beta'(x) \cos(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ . La résolution du système montre qu'il suffit que

$$\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Si  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$  est une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Si, de plus, l'intégrale de  $h$  existe au voisinage de  $+\infty$ , on peut ajouter la constante  $\int_1^{+\infty} h(t) dt$  (cela reste une primitive).  $x \mapsto -\int_x^{+\infty} h(t) dt$  est ainsi aussi une primitive de  $h$ . On peut appliquer ceci avec  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  (on a prouvé l'existence de l'intégrale) et  $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$  (la preuve de l'existence est la même). On peut donc choisir

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

On peut donc choisir  $f_1(t) = \frac{\sin(t)}{t}$  et  $f_2(t) = -\frac{\cos(t)}{t}$ .

(c) On a ainsi une solution particulière  $h$  définie par

$$h(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$$

Le changement de variable affine  $u = t - x$  donne

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x+u} du$$

(d) L'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  est un plan affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène  $y'' + y = 0$ , c'est à dire par  $\text{Vect}(\cos, \sin)$ . On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant la solution particulière trouvée. Comme  $\mathcal{L}(f)$  est solution sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,

$$\exists a, b / \forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

19. Soit  $x > 0$ .  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{x+t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ . On peut effectuer une IPP pour obtenir

$$\forall a > 0, \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \left[ -\frac{\cos(t)}{x+t} \right]_0^a - \int_0^a \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$$

On en déduit que

$$\forall a > 0, \left| \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right) + \int_0^a \frac{dt}{(x+t)^2} \leq 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right)$$

Tous les termes admettent une limite quand  $a \rightarrow +\infty$  et le passage à la limite donne

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \frac{2}{x}$$

On conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = 0$$

Comme  $\mathcal{L}(f)$  est aussi de limite nulle en  $+\infty$ , on en conclut que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cos + b \sin$  est de limite nulle en  $+\infty$ . En introduisant les suites  $(2n\pi)$  et  $(2n\pi + \pi/2)$ , on en déduit que  $a = b = 0$  et donc que

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

20. Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} = -\frac{x \sin(t)}{t(x+t)}$$

On en déduit que

$$\forall t \geq 1, \left| \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq |x| \frac{1}{t^2}$$

Le majorant étant intégrable sur  $[1, +\infty[$ , on peut intégrer ! On obtient un majorant de limite nulle quand  $x \rightarrow 0^+$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \left( \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = 0$$

Par ailleurs, comme  $\forall t, |\sin(t)| \leq |t|$  et comme toutes les intégrales existent (fonctions continues ou prolongeables par continuité),

$$\left| \int_0^1 \left( \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{x}{x+t} dt = x (\ln(x+1) - \ln(x))$$

et le majorant est de limite nulle quand  $x \rightarrow 0$ . Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

21. On vient de voir que  $\mathcal{L}(f)(x)$  tend vers  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  quand  $x \rightarrow 0$ . Mais  $\mathcal{L}(f)$  est continue en 0 et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

### Partie 3 : phénomène de Gibbs

22.  $S_n$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)x} \right)$$

Si  $x \notin \pi\mathbb{Z}$  alors  $e^{2ix} \neq 1$  et (somme géométrique)

$$\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)x} = e^{ix} \frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}} = e^{i(n+1)x} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

On en déduit alors que

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin((n+1)x) \cos((n+1)x)}{\sin(x)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)}$$

Le membre de gauche est continu en 0 et on peut donc intégrer cette égalité sur  $[0, x]$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ . Comme  $S_n(0) = 0$ , on obtient

$$\forall x \in [0, \pi], S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

23. On sait que

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k$$

Ainsi, en intégrant sur  $[0, 1[$ ,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt$$



$n$  étant fixé, on découpe la somme en deux morceaux :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k dt$$

La somme est encore géométrique et on peut écrire cela sous la forme

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

24. On a  $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$  et donc

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

25. On a  $\sin((2n+1)(\pi-x)) = \sin((2n+1)\pi - (2n+1)x) = \sin((2n+1)x)$ . Il en ressort alors que

$$\forall x, S_n(\pi-x) = S_n(x)$$

On fixe maintenant  $x \in ]0, \pi/2]$ . Comme  $\frac{\sin(2(n+1)t)}{t}$  est continue sur  $]0, x]$  et prolongeable par continuité en 0, on peut utiliser la question 22 pour écrire que

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin(2(n+1)t) \left( \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t} dt$$

$t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)}$  est continue sur  $]0, x]$  et prolongeable par continuité en 0 (équivalent à  $\frac{t^3}{6t^2} \rightarrow 0$ ). On peut alors utiliser la question 12 avec cette fonction de  $\varphi : t \mapsto \sin(2t)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \sin(2(n+1)t) \left( \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$$

Par ailleurs, le changement de variable  $u = 2(n+1)t$  donne

$$\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t} dt = \int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

Comme  $x > 0$ , cette quantité tend vers  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

En conclusion, on a

$$\forall x \in ]0, \pi/2], \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1$$

26. On vient de voir que  $\forall x \in ]0, \pi/2], S_n(x) \rightarrow 1 = f(x)$ .  
 Comme  $f(\pi - x) = f(x)$  et  $S_n(\pi - x) = S_n(x)$ , la propriété reste vraie pour  $x \in ]\pi/2, \pi[$ .  
 On a aussi  $S_n(0) = 0 \rightarrow 0 = f(0)$  et  $S_n(\pi) = 0 \rightarrow 0 = f(\pi)$  et la propriété est finalement valable sur  $[0, \pi]$ .  
 Par imparité des  $S_n$  et de  $f$ , cette propriété est finalement valable sur  $\mathbb{R}$ . On a donc convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de  $(S_n)$ .
27. On a immédiatement  $\varphi_n(0) = 0 \rightarrow 0$ .  
 Soit maintenant  $x \in ]0, \pi]$ . On a  $\sin(\frac{x}{2n}) \sim \frac{x}{2n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $\varphi_n(x) \rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = \varphi(x)$ .  
 On a montré que  $(\varphi_n)$  converge simplement sur  $[0, \pi]$  vers  $\varphi$ .
28. Il est immédiat, par théorèmes d'opération, que  $\varphi$  est continue sur  $]0, \pi/2]$ . Comme  $\sin(x) \sim_0 x$  on a aussi continuité en 0.  
 La question 22 donne

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

Le changement de variable affine  $u = 2(n+1)t$  donne

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_{n+1}(u) du$$

On veut intervertir limite et intégrale et on pense au théorème de convergence dominée.

- $(\varphi_{n+1})$  est une suite de fonctions continue sur  $[0, \pi]$  qui converge simplement sur  $[0, \pi]$  vers  $\varphi$  qui est elle même continue sur  $[0, \pi]$ .
- La fonction  $t \mapsto \sin(t)/t$  est continue sur  $[0, \pi/2]$  qui est un segment. Cette fonction est donc bornée sur ce segment et atteint ses bornes. Ainsi, il existe un réel  $t_1$  telles que

$$\forall t \in [0, \pi/2], m = \frac{\sin(t_1)}{t_1} \leq \frac{\sin(t)}{t}$$

Comme  $m > 0$ , on peut aussi écrire que

$$\forall t \in [0, \pi/2], 0 \leq \frac{t}{\sin(t)} \leq \frac{1}{m}$$

On va appliquer cela pour  $x \in ]0, \pi]$  et  $n \geq 0$  à  $t = \frac{x}{2(n+1)} \in [0, \pi/2]$  et le fait que pour  $x \in ]0, \pi]$ ,  $0 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0, \pi], |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{\sin(x)}{x} \frac{x/(2(n+1))}{\sin(x/(2(n+1)))} \leq \frac{1}{m}$$

Le majorant, qui est constant, est intégrable sur  $]0, \pi]$ .

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Comme  $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \rightarrow 1$ , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

29. En utilisant le DSE de  $\sin$ , on sait que

$$\forall x \in ]0, \pi], \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

La relation reste vraie pour  $x = 0$ . La série entière qui apparaît est de rayon de convergence infini et converge donc normalement sur  $[0, \pi]$ . Quand on intègre sur  $[0, \pi]$ , on est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale sur un segment. ceci donne

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Avec la question 28, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

A nouveau,  $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \rightarrow 1$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( S_n \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) - f \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

30. Posons  $u_n = (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$ .  $(u_n)$  est une suite alternée qui est de limite nulle (la série associée converge). De plus

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\pi^2(2n+1)}{(2n+3)^2(2n+2)} \leq \frac{\pi^2}{(2n+3)^2}$$

Pour  $n \geq 1$ , ce quotient est  $\leq 1$ . La suite  $(|u_n|)$  décroît donc à partir du rang 1. On en déduit que  $\sum_{k \geq n} u_k$  est du signe de  $u_n$  pour  $n \geq 1$ . En particulier, pour  $n = 4$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \geq 0$$

En particulier,

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1 \geq 2 \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

On peut raisonnablement penser que cette quantité est  $> 0.17$ , ce que je ne vérifie pas et on conclut.

En particulier

$$\|S_n - f\|_{\infty, ]0, \pi/2[} \geq \left( S_n \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) - f \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \right)$$

montre que  $\|S_n - f\|_{\infty, ]0, \pi/2[}$  n'est pas de limite nulle. On n'a donc pas de convergence uniforme sur  $]0, \pi/2[$ .