CCP PSI 1
un corrigé.

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1. Si $f : t \in [0,1] \mapsto$, le graphe de f est le segment d'origine $(0,0)$ et d'extremité $(1,1)$ et sa longueur est $\sqrt{2}$. C'est cohérent avec

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$$

I.2. On a ici

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}\, dt = \int_0^1 |\mathrm{ch}(t)|\, dt = \int_0^1 \mathrm{ch}(t)\, dt = \mathrm{sh}(1)$$

I.3.1. On a $f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc $1+(f'(t))^2 = \frac{1}{1-t^2}$. Ainsi,

$$L(f) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = [\arcsin(t)]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

I.3.2. Comme $t^2 + f(t)^2 = 1$, la courbe de f est un huitième du cercle unité et sa longueur est $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

I.4. On a cette fois

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} L(f) &= \left[t\sqrt{4t^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{4t^2+1}}\, dt \\ &= \sqrt{5} - L(f) + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \\ &= \sqrt{5} - L(f) + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

On peut bien sûr reconnaître la dérivée de argsh *et conclure en ces termes. Je préfère utiliser une forme logarithmique.*
$u \mapsto \ln(u+\sqrt{u^2+1})$ se dérive en $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ et on a finalement

$$2L(f) = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\left[\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right]_0^2$$

ou encore

$$L(f) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

II. Un calcul approché de longueur

II.1.1 On a $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et donc $1+(f'(t))^2 = \frac{t^4+1}{t^4}$. Ainsi

$$L(f) = \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2}\, dt$$

II.1.2 Le changement de variable $u = 1/t$ (de classe C^1 sur le segment $[1/2, 1]$) donne

$$L(f) = -\int_2^1 \sqrt{1 + \frac{1}{u^4}}\, du = \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du$$

qui correspond à la longueur du graphe de f sur $[1, 2]$.

II.2.1 Le cours indique que

$$\forall u \in]0, 1[,\ (1 + u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n \ \text{ avec } \ b_n = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

II.2.2 En particulier, dans le cas $\alpha = 1/2$, on a

$$b_1 = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ b_{n+1} = b_n \frac{\frac{1}{2} - n}{n + 1}$$

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n - 1)2^{2n}(n!)^2}$$

- Initialisation : la formule est immédiatement vraie si $n = 1$.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que la formule soit vraie aux rangs 0, $dots, n$. On a alors

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n - 1)2^{2n}(n!)^2} \frac{-(2n - 1)}{2(n + 1)} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n + 1)(n!)^2} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!(2n + 1)(2n + 2)}{(2n + 1)(2n + 2)2^{2n+1}(n + 1)(n!)^2} \\
&= (-1)^n \frac{(2n + 2)!}{(2n + 1)2^{2n+2}((n + 1)!)^2}
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n + 1$.

En substituant t^4 à t et en divisant par t^2, on a alors

$$\forall t \in]0, 1[,\ \frac{\sqrt{1 + t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n - 1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$$

II.2.3 Les a_n sont > 0 et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n - 1}{2n + 2} \in]0, 1]$$

et donc $0 < a_{n+1} \leq a_n$. La suite (a_n) est ainsi décroissante. Comme $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, on a

$$a_n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}}{(2n - 1)2^{2n}2\pi n(n/e)^{2n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

II.2.4 Pour l'instant, on a

$$L(f) = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t^2} + \int_{1/2}^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n t^{4n-2}\, dt$$

On veut intervertir la somme infinie et l'intégrale. On peut, par exemple, utiliser le théorème de convergence normale sur un segment. On pose $f_n\ :\ t \mapsto (-1)^{n-1} a_n t^{4n-2}$; c'est le terme général d'une série de fonctions continues sur $[1/2, 1]$. De plus

$$\forall t \in [1/2, 1],\ |f_n(t)| \leq a_n$$

et donc

$$\|f_n\|_{\infty,[1/2,1]} \leq a_n$$

Or, $\sum(a_n)$ est une série absolument convergente (avec l'équivalent trouvé et les séries de Riemann). Ainsi, $\sum(f_n)$ converge normalement (et donc uniformément) sur le SEGMENT $[1/2, 1]$. L'interversion est licite et donne

$$L(f) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \int_{1/2}^{1} t^{4n-2}\ dt$$

c'est à dire

$$L(f) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{4n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{4n-1}}\right)$$

II.2.5 En tenant compte du 1 comme terme de la série, la calculatrice donne avec les termes pour $n = 1..4$

$$L(f) \approx \frac{42369519}{322961408} \approx 1.13$$

L'erreur commise en approchant par les cinq premiers termes est (on peut découper car les deux séries convergent)

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| \sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{4n-1} - \sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{(4n-1)2^{4n-1}} \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{4n-1} \right| + \left| \sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{(4n-1)2^{4n-1}} \right|
\end{aligned}$$

$\frac{a_n}{4n-1}$ et $\frac{a_n}{(4n-1)2^{4n-1}}$ étant les termes généraux de suites positives décroissantes, on peut appliquer la règle spéciale (majoration du reste) pour obtenir

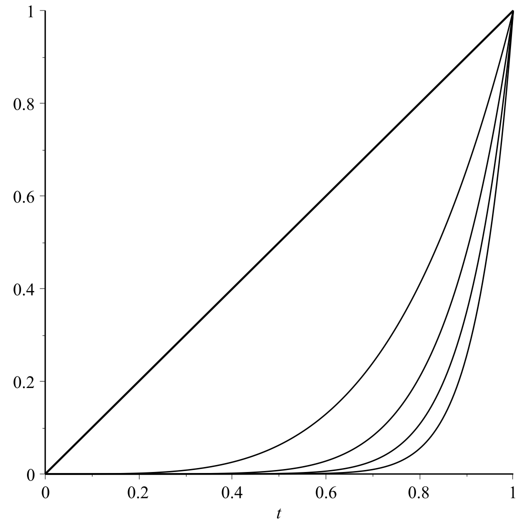
$$\Delta \leq \frac{a_5}{19} + \frac{a_5}{19.2^{19}} \leq \frac{2a_5}{19} = \frac{7}{2432} \approx 0.003$$

III. Longueur du graphe des fonctions puissances

III.1.1 Comme en **I.1** et **I.4**, on a

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ et } \ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5})$$

III.1.2 Voici quelques graphes



On peut penser que (λ_n) converge (en croissant) vers 2.

III.2.1 En écrivant que $nt^{n-1} = \sqrt{n^2t^{2n-2}}$ et en utilisant $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ on obtient directement

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} + nt^{n-1}}$$

III.2.2 La fonction f_n dans l'intégrale définissant μ_n est inférieure à 1 (le dénominateur est plus grand que 1) et donc $\mu_n \leq 2$. S'il y avait égalité on aurait $\int_0^1 (1 - f_n) = 0$. Comme $1 - f_n$ est positive, continue et non nulle, ceci est impossible. Ainsi $\mu_n < 2$. De plus $n\int_0^1 t^{n-1}\,dt = 1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n < 2$$

III.2.3 Utilisons le théorème de convergence dominée pour étudier (μ_n).

- $f_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$ est continue sur $[0,1]$ et (f_n) converge simplement vers $t \mapsto 1$ sur $[0,1[$ (car $\forall t \in [0,1[,\ nt^{n-1} \to 0$ quand $n \to +\infty$).
- La limite simple $t \mapsto 1$ est continue sur $[0,1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\ |f_n(t)| \leq 1$ et le majorant est intégrable sur $[0,1[$ (continu sur le segment).

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \int_0^1 dt = 1$$

III.2.4 Il vient alors immédiatement $(\lambda_n = 1 + \mu_n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 2$$

III.3. En écrivant que $f'(t) = \sqrt{(f'(t)^2}$ (fonction croissante et donc à dérivée positive) on a de même

$$L(f) - \int_0^1 f'(t) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+(f'(t))^2} + f'(t)} \leq 1$$

Or, $\int_0^1 f'(t) = f(1) - f(0) = 1$ et donc

$$L(f) \leq 2$$

S'il y avait égalité, on aurait l'intégrale de $1 - \frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2+f'(t)}} = g(t)$ qui serait nulle sur $[0,1]$ et comme g est positive et continue, cela signifierait que g est nulle c'est à dire que f' est nulle ou encore que f est constante ce qui n'est pas le cas ($f(0) \neq f(1)$). On a donc

$$L(f) < 2$$

IV. Un résultat inattendu

IV.1.1 $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 1 en 0. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et $\int_0^1 f$ existe (intégrale classique).

IV.1.2 On opère une intégration par partie en primitivant sin en $-\cos$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$ en $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. On obtient directement

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

On a $\frac{\cos(t)}{t^2} = O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc (comparaison à Riemann) une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale du membre de droite admet donc a fortiori une limite quand $x \to +\infty$ (intégrabilité entraîne existence d'intégrale). De plus, $\cos(x)/x \to$ quand $x \to +\infty$ (car cos est bornée). Finalement, on a l'existence de

$$\int_1^+ \infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

IV.1.3 On a de même

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2x)}{x} - \sin(2)\right) + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt$$

$t \mapsto \frac{\sin(2t)}{t^2} = O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc (comparaison à Riemann) une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$. Comme à la question précédente, on a l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt = -\frac{\sin(2)}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt$$

IV.1.4 On a $\frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$ et donc

$$\int_x^1 \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt = \frac{\ln(x)}{2} - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,dx$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente.

Comme $\frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0$, ceci revient à dire que $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$. Or, $|\sin| \geq \sin^2 \geq 0$ et donc $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t}$ n'est pas intégrable non plus sur $[1,+\infty[$. Et comme cette fonction est positive, ceci revient à dire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$ diverge.

IV.2.1 $t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $[x,1]$ pour $x > 0$. On peut donc poser le changement de variable $u = 1/t$. Il indique que

$$f(x) = \int_x^1 \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

Avec les questions précédente, f est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du$$

IV.2.2 g est continue sur $]0,1]$, $]0,1]$ est un intervalle qui contient 1. Par théorème fondamental, $-f\ :\ x \mapsto \int_1^x g(t)\, dt$ est une primitive de g sur $]0,1]$. Comme g est de classe C^∞ sur $]0,1]$, $-f$, et donc f, l'est aussi. On a vu (ou imposé par choix de $f(0)$) la continuité en 0.

IV.2.3 Le même calcul que plus haut donne

$$\int_x^1 |g(t)|\, dt = \int_1^{1/x} \frac{|\sin(u)|}{u}\, du$$

On a vu que l'intégrale de $u \mapsto \frac{|\sin(u)|}{u}$ n'existe pas sur $[1,+\infty[$. Comme cette fonction est positive, son intégrale entre 1 et a tend vers $+\infty$ quand $a \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\, dt = +\infty$$

IV.3. Pour $t \in]0,1]$, on a $f'(t) = -g(t)$ et donc $1 + (f'(t))^2 = 1 + \frac{1}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)$. Ainsi

$$\forall x \in]0,1],\ \lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}\, dt$$

On en déduit que

$$\forall x \in]0,1],\ \lambda(x) \geq \int_x^1 |g(t)|\, dt$$

et par comparaison

$$\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$$

Ceci signifie que la courbe représentative de la fonction f continue sur le segment est $[0,1]$ est infinie.

V. Continuité de la fonction longueur

V.1.1 L'application est positive. Son homogénéité découle de celle de $\|.\|_\infty$ et de celle du module (on a $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$). L'inégalité triangulaire découle de la même propriété pour $\|.\|_\infty$. Enfin, si $\|f\| = 0$ alors $f(0) = \|f'\|_\infty = 0$. f' est donc nulle et f est constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle. On a donc aussi l'axiome de séparation et $\|.\|$ est une norme sur E_1.

V.1.2 Soit $f \in E_1$. On a

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt\right| \leq |f(0)| + \int_x^1 |f'(t)|\, dt \leq |f(0)| + (1-x)\|f'\|_\infty \leq \|f\|$$

En passant à la borne supérieure sur x, on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|$$

V.1.3 Prenons les fonctions $p_n\ :\ t \mapsto t^n$ de la partie **III** (elles sont dans E_1). On a $\|p_n\|_\infty = 1$ et $\|p_n\| = n$. Le quotient $\|p_n\|/\|p_n\|_\infty$ n'étant pas borné, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E_1.

V.2.1 On a immédiatement $\|f_n\|_\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. (f_n) est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

V.2.2 La définition donne

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n\pi^2 \cos^2(n\pi t)}\, dt$$

Le changement de variable $u = n\pi t$ donne alors

$$I_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + n\pi^2 \cos^2(u)}\, du$$

On a alors immédiatement

$$I_n \geq \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sqrt{n\pi^2 \cos^2(u)}\, du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} |\cos(u)|\, du$$

$|\cos|$ étant π périodique, on a finalement

$$I_n \geq \sqrt{n} \int_0^{\pi} |\cos(u)|\, du = 2\sqrt{n}$$

Comme $\pi \leq 4$ on peut aussi écrire que

$$I_n \geq \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

V.2.3 Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, la continuité de L au sens de $\|.\|_\infty$ entraînerait $L(f_n) \to L(0) = 0$. Comme on a $L(f_n)$ qui est de limite infinie quand $n \to +\infty$ on peut conclure que L n'est pas continue au sens de $\|.\|_\infty$.

V.2.4 Soient $f, g \in E_1$. On a

$$\begin{aligned}
|L(f) - L(g)| &= \left| \int_0^1 (\sqrt{1 + (f')^2} - \sqrt{1 + (g')^2}) \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{|(f')^2 - (g')^2|}{\sqrt{1 + (f')^2} + \sqrt{1 + (g')^2}} \\
&\leq \int_0^1 |f' - g'|.|f' + g'| \\
&\leq \|f' - g'\|_\infty \|f' + g'\|_\infty \\
&\leq \|f - g\| \|f + g\| \\
&\leq \|f - g\| (\|f\| + \|g\|)
\end{aligned}$$

Soit (f_n) une suite d'éléments de E_1 qui converge vers f au sens de $\|.\|$. On a donc $\|f_n - f\| \to 0$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaires, on en déduit que $\|f_n\| \to \|f\|$. L'inégalité

$$|L(f_n) - L(f)| \leq (\|f\| + \|f_n\|)\|f_n - f\|$$

montre alors que $L(f_n) \to L(f)$. L est continue au sens de $\|.\|$.