# CCP PSI 2
## Un corrigé

# 1 Etude de compacité.

**1.1.** Le polynôme caractéristique de $S$ est

$$\chi_S = X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5)$$

$S$ possède donc deux valeurs propres :

$$\mathrm{Sp}(S) = \{1, 5\}$$

Les sous-espaces propres étant en somme directe, ils doivent être de dimension 1. $(\sqrt{3}, -1)$ convient pour la valeur propre 1 et $(1, \sqrt{3})$ pour la valeur propres 5. On a donc

$$E_1(S) = \mathrm{Vect}((\sqrt{3}, -1)) \quad \text{et} \quad E_5(S) = \mathrm{Vect}((1, \sqrt{3}))$$

On en déduit que

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in O(2)$$

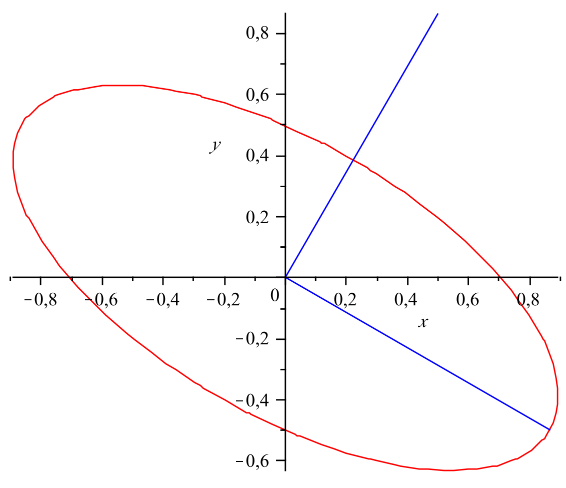
Un calcul immédiat donne

$$(x|s(x)) = 2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2$$

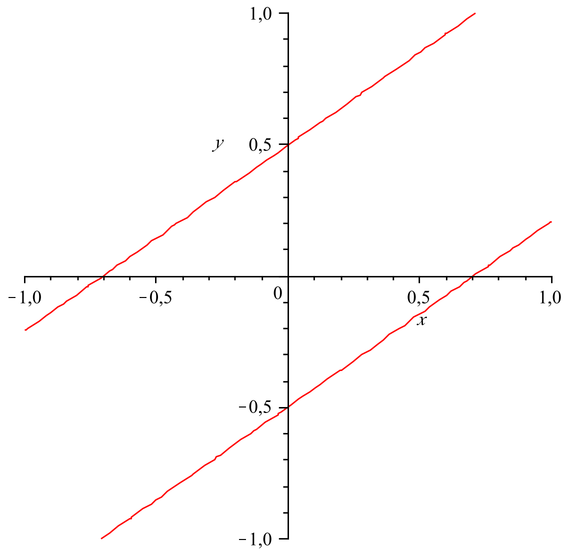
$Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est la matrice colonne associée à $x$ dans la base orthonormée $(f_1, f_2)$ des colonnes de $P$. On a $(P^{-1} = {}^tP)$

$$(x|s(x)) = {}^tXSX = {}^tXP\mathrm{diag}(1,5)P^{-1}X = {}^tY\mathrm{diag}(1,5)Y = y_1^2 + 5y_2^2$$

et l'équation de $\sigma$ dans le nouveau repère $(O, (f_1, f_2))$ est $y_1^2 + 5y_2^2 = 1$. $\sigma$ est ainsi une ellipse et on vient d'en donner une équation réduite (les axes sont dirigés par $f_1$ et $f_2$ et sont de demi-longueurs 1 et $1/\sqrt{5}$ ; le centre est $O$). On en déduit l'allure de $\sigma$.



**1.2.** On a de même
$$\chi_S = X^2 - 6X = X(X-6)$$
et comme ci-dessus, on obtient
$$\mathrm{Sp}(S) = \{0,6\},\ E_0(S) = \mathrm{Vect}((\sqrt{2},-1)),\ E_6(S) = \mathrm{Vect}((1,\sqrt{2}))$$
On a
$$(x|s(x)) = 2x_1^2 - 4\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_2^2$$
Dans le repère $(O,(f_1,f_2))$ où $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},-1)$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2})$ l'équation de $\sigma$ est $6y_1^2 = 1$ et $\sigma$ est la réunion de deux droites horizontales dans le nouveau repère, ce que l'on peut aussi voir en écrivant que
$$(x|s(x)) - 1 = (\sqrt{2}x_1 - 2x_2)^2 - 1 = (\sqrt{2}x_1 - 2x_2 - 1)(\sqrt{2}x_1 - 2x_2 + 1)$$




**2.1.** On a immédiatement
$$(x|s(x)) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i | \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i\varepsilon_i\right)$$
Comme la base des $\varepsilon_i$ est orthonormée, on en déduit que
$$(x|s(x)) = \sum_{i=1}^n a_i^2\lambda_i$$
Comme $\lambda_1 > 0$, on peut considérer $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\varepsilon_1$ et il vérifie $(x|s(x)) = 1$ et est donc dans $\Sigma$ ce qui montre que
$$\Sigma \neq \emptyset$$
Par ailleurs, et en conservant les notations de l'énoncé
$$\forall x \in \Sigma,\ 1 = (x|s(x) \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda_1\|x\|^2$$
et on en déduit que $\Sigma$ est incluse dans la boule fermée de centre 0 de rayon $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et est, en particulier, bornée.
La continuité de $x \mapsto (x|s(x))$ est conséquence directe de la formule donnée plus haut ($(x|s(x))$ est une fonction continue des coordonnées de $x$). $\Sigma$ est alors fermée comme image réciproque de la partie fermée $\{1\}$ par cette application continue.
$\Sigma$ est finalement une partie compacte (fermée bornée en dimension finie).

**2.2.**

**2.2.1** On a toujours $(x|s(x)) = \sum_{i=1}^n a_i^2\lambda_i$ et cette quantité est $\leq 0$ (et donc différente de 1) si $\lambda_n \leq 0$. Dans ce cas, $\Sigma$ est vide, ce qui est exclus.

**2.2.2** Toujours avec la formule précédente,

$$(x_r|s(x_r)) = \lambda_1 r^2 + \lambda_n \frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n} = 1$$

et ainsi, $x_r \in \Sigma$. Par ailleurs, et comme la base $(\varepsilon_i)$ est orthonormale,

$$\|x_r\|^2 = r^2 + \frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n} = \frac{r^2(\lambda_n - \lambda_1) + 1}{\lambda_n}$$

Avec $\lambda_n - \lambda_1 > 0$ et $\lambda_n$, on a alors

$$\lim_{r\to+\infty} \|x_r\|^2 = +\infty$$

On en déduit que $\Sigma$ n'est pas bornée et ce n'est donc pas une partie compacte.

# 2 Racine carrée d'une matrice de $S_n^+$.

**1.1.** Si $S \in S_n^+$ alors $\forall X,\ {}^tXSX \geq 0$. En particulier,

$$\forall i,\ \lambda_i = \lambda_i\|X_i\|^2 = {}^tX_iSX_i \geq 0$$

**1.2.** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; on peut l'écrire $X = \sum_{i=1}^n x_iX_i$ et alors, la base des $X_i$ étant orthonormale,

$${}^tXSX = \left(\sum_{i=1}^n x_iX_i | \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Si les $\lambda_i$ sont tous positifs alors ${}^tXSX \geq 0$ et $S \in S_n^+$.

**1.3.** Il existe une matrice orthogonale $P$ telle que $S = P\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P{-}1$. On a alors $S$ inversible comme produit de telles matrices et

$$S^{-1} = P\text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)P^{-1}$$

Cette matrice est symétrique (car $P^{-1} = {}^tP$) et ses valeurs propres sont $> 0$ (ce sont les $1/\lambda_i$). On a donc (avec le résultat admis)

$$S^{-1} \in S_n^{++}$$

**2.1.** De manière immédiate,

$$\Delta^2 = D$$

En composant $NY = \mu Y$ par $N$, on obtient $N^2Y = \mu^2 Y$ et donc $DY = \mu^2 Y$ ce qui donne, en regardant coordonnée par coordonnée,

$$\forall i \in [|1, n|],\ \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$$

Si $y_i \neq 0$ alors $\mu^2 = \lambda_i$ et donc $\mu = |\mu| = \sqrt{\lambda_i}$ et donc $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$. Ceci reste bien sûr vrai si $y_i = 0$ et ainsi

$$\forall i \in [|1, n|],\ \mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$$

Ceci s'écrit matriciellement $\mu Y = \Delta Y$ ou encore $NY = \Delta Y$. Comme $N$ est symétrique, il existe une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour $N$. Ce qui précède donne $NY_i = \Delta Y_i$ pour tout $i$. Par combinaisons linéaires (et comme les $Y_i$ forment une base), $NY = \Delta Y$ est vrai pour tout $Y$ et donc

$$\Delta = N$$

(puisque les applications linéaires canoniquement associées à $N$ et $\Delta$ sont égales).

**2.2.** Si la matrice $T$ convient (on raisonne ici par conditions nécessaires) alors $T^2 = UD^tU$ et donc (comme ${}^tU = U^{-1}$)
$$({}^tUTU)^2 = {}^tUT^2U = D$$
${}^tUTU$ est symétrique et semblable à $T$ donc à valeurs propres positives. C'est donc un élément de $S_n^+$. La question précédente indique que ${}^tUTU = \Delta$ et on a donc
$$T = U\Delta^tU$$
Réciproquement, il suffit de faire le calcul pour vérifier que pour ce choix de $T$, $T^2 = S$. De plus, $T$ est symétrique et positive (semblable à $\Delta$ et donc à valeurs propres positives).
On a donc montré que
$$\forall S \in S_n^+,\ \exists! T \in S_n^+ /\ T^2 = S$$

**3.1.** On a
$$L_k(S)X_i = \left(\prod_{j\neq k} \frac{1}{\mu_k - \mu_j}\right)\left(\prod_{j\neq k}(S - \mu_j I_n)\right) X_i$$
Comme $(S - \alpha I_n)X_i = (\lambda_i - \alpha)X_i$, on montre de proche en proche que
$$L_k(S)X_i = \left(\prod_{j\neq k} \frac{1}{\mu_k - \mu_j}\right)\left(\prod_{j\neq k}(\lambda_i - \mu_j)\right) X_i$$
Distinguons deux cas.
- Si $\mu_k = \lambda_i$ alors $L_k(S)X_i = X_i$.
- Sinon, $\lambda_i$ est égal à iun $\mu_j$ avec $j \neq k$ et $L_k(S)X_i = 0$.

**3.2.** $L_k$ est nul en $\mu_j$ pour $j \neq k$ et vaut 1 en $\mu_k$. Ainsi,
$$P = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k$$
Avec la question précédente,
$$P(S)X_i = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k(S)X_i = \sqrt{\lambda_i} X_i$$
$(X_1, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres pour $P(S)$ et les valeurs propres de $P(S)$ sont exactement les $\sqrt{\lambda_i}$ et sont positives. Comme $P(S) \in S_n(\mathbb{R})$ on a finalement
$$P(S) \in S_n^+$$
On a $P(S)^2X_i = P(S)(P(S)X_i) = P(S)(\sqrt{\lambda_i}X_i) = \sqrt{\lambda_i}P(S)X_i = \lambda_i X_i = SX_i$. Ainsi $P(S)^2 = S$ (les endomorphismes canoniquement associés étant égaux sur une base). Par unicité, on a prouvé que
$$P(S) = \sqrt{S}$$

**3.3.** $(0, 1, 1)$ et $(1, -2, 0)$ sont vecteurs propres indépendants pour $S$ associés à la valeur propre 3. Par considération de trace, la valeur propre restante vaut 9. Une résolution au brouillon montre que $(2, 1, -1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 9. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on a exactement
$$\mathrm{Sp}(S) = \{3, 9\},\ E_3(S) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1), (1, -2, 0)),\ E_9(S) = \mathrm{Vect}((2, 1, -1))$$

Pour calculer $\sqrt{S}$, on recherche le polynôme interpolateur $P$ :

$$P = \frac{3-\sqrt{3}}{6}X + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$$

(il vaut $\sqrt{3}$ en 3, 3 en 9 et est de degré $\leq 1$) et ainsi

$$\sqrt{S} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}S + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}I_n$$

# 3 Une propriété de la trace des matrices de $S_n^+$.

**1.1.** On a $(\delta V)_{i,i} = \alpha_i v_{i,i}$. Comme $V \in O(n)$, tous ses coefficients sont dans $[-1,1]$ (la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1) et en particulier, $v_{i,i} \leq 1$. Comme les $\alpha_i$ sont positifs (pas de changement de sens d'inégalité) on a donc

$$\operatorname{tr}(\delta V) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \operatorname{tr}(\delta)$$

**1.2.** Comme $S \in S_n^+$, il existe $V \in O(n)$ et $\delta$ diagonale à coefficients positifs tels que $S = {}^tV\delta V$. Comme $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ on a alors

$$\operatorname{tr}(SU) = \operatorname{tr}({}^tV\delta VU) = \operatorname{tr}(\delta VU{}^tV)$$

$VU{}^tV = VUV^{-1} \in O(n)$ (car c'est un groupe) et $\operatorname{tr}(\delta) = \operatorname{tr}(S)$ (invariance par similitude). On en déduit que

$$\operatorname{tr}(SU) \leq \operatorname{tr}(\delta) = \operatorname{tr}(S)$$

**2.1.** Si $a = b = 0$ alors le résultat est immédiat (tout choix de $\varphi$ convient). Sinon, $M = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ est sur le cercle unité et il existe $\varphi$ tel que $M = (\sin(\varphi), \cos(\varphi))$. On a alors

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}(\sin(\varphi)\cos(\theta) + \cos(\varphi)\sin(\theta)) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$$

Si $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leq a$ pour tout $\theta$ alors $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi) \leq a$ pour tout $\theta$. En choisissant $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, on a donc $\sqrt{a^2+b^2} \leq a$ et donc $b = 0$.

**2.2.** En notant $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$U = \sum_{i \notin \{p,q\}} E_{i,i} + \cos(\theta)(E_{p,p} + E_{q,q}) + \sin(\theta)(E_{q,p} - E_{p,q})$$

Comme $AE_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j$-ème qui contient la $i$-ème de $A$, sa trace vaut $a_{j,i}$. Ainsi,

$$\operatorname{tr}(AU) = \sum_{i \notin \{p,q\}} a_{i,i} + \cos(\theta)(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin(\theta)(a_{p,q} - a_{q,p})$$

$\operatorname{tr}(AU) \leq \operatorname{tr}(A)$ se traduit donc par $\cos(\theta)(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin(\theta)(a_{p,q} - a_{q,p}) \leq (a_{p,p} + a_{q,q})$. Ceci étant vrai pour tout $\theta$, la question précédente donne $a_{p,q} - a_{q,p} = 0$. Ceci étant vrai pour tout choix de $p < q$, on a donc

$$A \in S_n(\mathbb{R})$$

**2.3.** Il existe $P \in O(n)$ telle que $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ et $\operatorname{tr}(A) = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Par définition, $P^{-1}UP = \operatorname{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. On a alors (la trace est invariante par similitude et $P^{-1}AUP = \operatorname{diag}(-\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$)

$$\operatorname{tr}(AU) = -\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \leq \beta_1 + \dots + \beta_n = \operatorname{tr}(A)$$

On en déduit que $\beta_1 \geq 0$. On procède de même pour les autres $\beta_i$. On en déduit que $A$ est à valeurs propres positives et, avec la question précédente,

$$A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

# 4 Des inégalités remarquables.

**1.** Par inégalité de Schwarz,

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leq (t(x)|t(x))(t^{-1}(x)|t^{-1}(x))$$

$t$ et $t^{-1}$ sont autoadjoints puisque représentés par des matrices symétriques ($T$ et $T^{-1}$) en base orthonormale. On a ainsi

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leq (t^2(x)|x)((t^{-1})^2(x)|x)$$

de $t^2 = s$, on tire $(t^{-1})^2 = s^{-1}$ et on obtient alors l'inégalité (1). Il y a égalité si $t(x)$ et $t^{-1}(x)$ sont des vecteurs liés c'est à dire s'il existe $\lambda$ tel que $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$ c'est à dire $t^2(x) = \lambda x$ ou encore $s(x) = \lambda x$. Il y a donc égalité pour les vecteurs propres de $s$ (plus le vecteur nul).
*Remarque : comme t est autoadjoint,* $(t^{-1}(x)|t(x))^2 = \|x\|^4$.

**2.** $P(a) = (a - \lambda_1)(a - \lambda_n)$. Tous les $\lambda_i$ sont situés entre les racines de $P$ et on a donc

$$\forall i,\ P(\lambda_i) \leq 0$$

Comme $s(x) = \lambda_i x$, $s^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda_i}x$ et $P(s)(x) = P(\lambda_i)x$. Ainsi

$$v(x) = -P(s)(\frac{1}{\lambda_i}x) = -\frac{1}{\lambda_i}P(s)(x_i) = -\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}x$$

En notant $(x_1, \dots, x_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour $s$ (elle existe car $s$ est autoadjoint), on obtient une base orthonormée de vecteurs propres pour $v$ associés à des valeurs propres postive ($-\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i} \geq 0$). Ainsi

$$V \in S_n^+$$

**3.** On a

$$Q(0) = (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n \quad \text{et} \quad Q(1) = (s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + \lambda_1\lambda_n s^{-1}(x)|x) = -(v(x)|x)$$

$S^{-1}$ et $V$ étant dans $S_n^+$, on a donc

$$Q(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad Q(1) \leq 0$$

Pour $x \neq 0$, $Q$ est un polynôme du second degré (car $(s(x)|x) > 0$) qui possède une racine réelle (car $Q(0)Q(1) \leq 0$ et $Q$ est continue donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, son discriminant est supérieur ou égal à 0, i.e.

$$(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4$$

L'inégalité reste vraie si $X = 0$.

**4.** $x_1$ et $x_n$ sont orthogonaux car $\lambda_1 \neq \lambda_n$ et les sous-espaces propres de $s$ sont en somme directe orthogonale. On a ainsi

$$(s(x)|x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_n x_n | x_1 + x_n) = \lambda_1 + \lambda_n$$

$$(s^{-1}(x)|x) = (\lambda_1^{-1}x_1 + \lambda_n^{-1}x_n | x_1 + x_n) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1\lambda_n}$$

$$(x|x) = (x_1 + x_2 | x_1 + x_2) = (x_1|x_1) + (x_2|x_2) = 2$$

On a donc bien égalité dans (2).