

CCP PSI 1 un corrigé

1 Une étude de séries.

1.1 Etude de la fonction L .

1.1 $(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ est le terme général d'une suite de limite nulle si $|x| < 1$ et non bornée sinon (croissances comparées). Par lemme d'Abel, le rayon de convergence de la série entière est égal à 1. L est donc définie au pire sur $] -1, 1[$ et au mieux sur $[-1, 1]$. Pour $x = 1$, il y a convergence de la série (séries de Riemann alternée ou règle spéciale, le terme général étant décroissant en module, de signe alterné et de limite nulle). Pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique). Ainsi

L est définie sur $] -1, 1[$

On reconnaît un développement usuel :

$$\forall x \in] -1, 1[, L(x) = \ln(1 + x)$$

1.2 Soit $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

- Les f_n sont des fonctions continues sur $[0, 1]$.
- Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x)$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et de limite nulle. On peut donc dire que $\sum (f_n(x))$ converge par règle spéciale ET que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$ et est le terme général d'une suite de limite nulle.

$\sum (f_n)$ est donc uniformément convergente sur $[0, 1]$

Par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions,

$$L \in \mathcal{C}^0([0, 1])$$

En particulier,

$$L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 + x) = \ln(2)$$

1.2 Etude de la série $\sum \left(\frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)_{k \geq 1}$.

2.1 On découpe la somme en trois parties selon la congruence modulo 3 de l'indice puis on s'arrange pour retrouver tous les $\frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3p} a_k &= \sum_{i=1}^p a_{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} a_{3i+1} + \sum_{i=0}^{p-1} a_{3i+2} \\ &= -\sum_{i=1}^p \frac{2}{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{3i+1} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{3i+2} \\ &= -3 \sum_{i=1}^p \frac{1}{3i} + \sum_{k=1}^{3p} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On change alors d'indice ($h = k - p$) et on factorise :

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{p+h} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

2.2 On fait apparaître une somme de Riemann (d'ordre $2p$) associée à $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+2t}$ sur $[0, 1]$. Comme la fonction est continue sur le segment, on peut appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = 2 \left(\frac{1}{2p} \sum_{h=1}^{2p} \varphi\left(\frac{h}{2p}\right) \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+2t}$$

c'est à dire

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{3p} a_k = \ln(3)$$

En notant (A_n) la suite des sommes partielles de la série proposée, on a montré que $A_{3p} \rightarrow \ln(3)$. Comme $A_{3p+1} = A_{3p} + a_{3p+1}$ et $A_{3p+2} = A_{3p+1} + a_{3p+2}$ on a aussi convergence vers $\ln(3)$ des extraites (A_{3n+1}) et (A_{3n+2}) . Nos trois extraites sont convergentes de même limite et "recouvrent" toute la suite des sommes partielles. On a donc convergence de la série avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln(3)$$

2.3 Soit $u_k = \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$. On a $u_{3p} = \frac{1}{3p}$, $u_{3p+1} = -\frac{1}{2(3p+1)}$ et $u_{3p+2} = -\frac{1}{2(3p+2)}$. Ainsi, $u_p = -\frac{a_p}{2}$. La convergence de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(u_n)$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\frac{1}{2} \ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

1.3 Etude des séries $\sum \left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)_{k \geq 1}$ et $\sum \left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)_{k \geq 1}$.

3.1 $S_n(t)$ est la somme partielle d'une série géométrique de raison $e^{it} \neq 1$ et on a donc

$$S_n(t) = \frac{e^{it} - (e^{it})^{n+1}}{1 - e^{it}} = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$$

3.2 On a, pour $t \neq 0[2\pi]$,

$$\varphi(t) = \frac{e^{-it} - 1}{|e^{it} - 1|^2} = \frac{\cos(t) - 1}{(\cos(t) - 1)^2 + \sin(t)^2} - i \frac{\sin(t)}{(\cos(t) - 1)^2 + \sin(t)^2}$$

φ est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[\pi, \alpha]$ (ses parties réelle et imaginaire le sont).

3.3 Une intégration par parties donne

$$\int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi(t) dt = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \varphi(t) \right]_{\pi}^{\alpha} - \frac{1}{i(n+1)} \int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi'(t) dt$$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi, \alpha]$ et sont donc bornées sur ce segment. En notant M_0 et M_1 des majorants sur ce segment de $|\varphi|$ et $|\varphi'|$, on a alors grossièrement

$$\left| \int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{2M_0}{n+1} + \frac{(\alpha - \pi)M_1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi(t) dt = 0$$

3.4 Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^{\alpha} e^{ikt} dt = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha} - e^{ik\pi}}{ik} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} - \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

Le second terme du membre de droite tend vers $i \ln(2)$ (question **1.2**). On a aussi

$$\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \int_{\pi}^{\alpha} \varphi(t) e^{i(n+1)t} dt - \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

qui tend vers $-\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$ (question **3.3**). On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln(2) - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

ce qui prouve la convergence de $\sum \left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)_{k \geq 1}$ et donne la somme de la série.

3.5 On a, pour $t \neq 0[2\pi]$,

$$e^{it} \varphi(t) = \frac{e^{it/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{e^{it/2}}{2i \sin(t/2)}$$

3.6 En passant aux parties réelle et imaginaire dans le résultat de la question **3.4** on en déduit que les séries $\sum \left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)_{k \geq 1}$ et $\sum \left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)_{k \geq 1}$ convergent et que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} &= -\ln(2) - \int_{\pi}^{\alpha} \operatorname{Re}(ie^{it} \varphi(t)) dt \\ &= -\ln(2) - \int_{\pi}^{\alpha} \frac{\cos(t/2)}{2 \sin(t/2)} dt \\ &= -\ln(2) - [\ln(|\sin(t/2)|)]_{\pi}^{\alpha} \\ &= -\ln(2 \sin(\alpha/2)) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = - \int_{\pi}^{\alpha} \operatorname{Im}(ie^{it} \varphi(t)) dt = - \int_{\pi}^{\alpha} \frac{dt}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

Le résultat est cohérent avec celui de **2.3** puisque $2 \sin(\pi/3) = \sqrt{3}$ ($2\pi/3$ n'est pas dans $[\pi, 2\pi[$ mais l'hypothèse importante est seulement $\alpha \neq 0[2\pi]$...).

2 Limite d'une intégrale.

2.1 Existence de $\tilde{f}_g(x)$.

1. On notera M un majorant de $|g|$ sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \geq 0$. $t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Or, $|f(t)g(xt)| \leq M|f(t)|$ et le majorant est intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur \mathbb{R}^+ et a fortiori, son intégrale $\tilde{f}_g(x)$ existe. De plus

$$\forall x \geq 0, |\tilde{f}_g(x)| \leq M \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$$

ce qui montre que \tilde{f}_g est bornée sur \mathbb{R}^+ .

- $\forall x \geq 0$, $t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

- $\forall t \geq 0, x \mapsto f(t)g(xt)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^+, \forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |f(t)g(xt)| \leq M|f(t)|$. Le majorant est indépendant de x et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\tilde{f}_g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

Remarque : il n'y a, dans cette question, pas de raison d'exclure le cas $x = 0$.

2.2 Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.

2.1. D'après l'existence de l'intégrale de $|f|$ sur \mathbb{R}^+ , on a $\int_0^a |f(t)| dt$ qui tend vers $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ quand $a \rightarrow +\infty$. En revenant à la définition de la limite, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq 0 / \forall a \geq A, \left| \int_a^{+\infty} |f(t)| dt \right| \leq \varepsilon$$

On a a fortiori le résultat demandé (pour $\varepsilon > 0$ donné le A précédent convient).

2.2. Une intégration par parties donne, pour $x > 0$,

$$\int_0^A f(t)e^{ixt} dt = \frac{f(A)e^{ixA} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^A f'(t)e^{ixt} dt$$

f' est continue sur le segment $[0, A]$ et donc bornée sur ce segment. Une majoration grossière donne alors

$$\left| \int_0^A f(t)e^{ixt} dt \right| \leq \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{A\|f'\|_{\infty, [0, A]}}{x}$$

Le majorant étant de limite nulle quand $x \rightarrow +\infty$, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)e^{ixt} dt = 0$$

2.3. Soit $\varepsilon > 0$. La question **2.1** donne un A . La question **2.2** donne alors un x_0 au delà duquel $\left| \int_0^A f(t)e^{ixt} dt \right| \leq \varepsilon$. On a alors

$$\forall x \geq x_0, \left| \tilde{f}_g(x) \right| \leq \left| \int_0^A f(t)e^{ixt} dt \right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| \leq 2\varepsilon$$

Par définition des limites, on a donc montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}_g(x) = 0$$

2.3 Etude pour une fonction f particulière.

3.1. On peut procéder par double intégration par partie ou (c'est l'option choisie ici) transiter par l'exponentielle complexe.

$$\theta(\gamma) = \text{Im} \left(\int_0^\pi e^{y(\gamma+i)} dy \right) = \text{Im} \left(\frac{-e^{\pi\gamma} - 1}{\gamma + i} \right) = \frac{1 + e^{\pi\gamma}}{1 + \gamma^2}$$

3.2. Le changement de variable $u = tx$ donne

$$\forall a \geq 0, \int_0^a e^{-t} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \int_0^{ax} e^{-u/x} |\sin(u)| du$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, $ax \rightarrow +\infty$ car $x > 0$ et les différentes intégrales existent ($g = |\sin|$ est bornée). On obtient,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$$

3.3. Le changement de variable $v = u - k\pi$ donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \int_0^\pi e^{-\frac{v+k\pi}{x}} |\sin(v)| dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

3.4. La série proposée est la série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}}$. Sa raison est dans $] -1, 1[$ et la série converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

3.5. $\tilde{E}(x)$ est la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\frac{1}{x} \int_0^{(n+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$. Par relation de Chasles et avec les questions précédentes, on a donc

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + \pi^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{x}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $1 - e^{-\frac{\pi}{x}} \sim \frac{\pi}{x}$ ce qui permet de lever l'indétermination quand on passe à la limite et d'obtenir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$$

2.4 Etude générale.

4.1. Notons $h_k : t \mapsto \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$. (h_k) est une suite de fonctions continues sur \mathbb{R} et $\|h_k\|_\infty \leq \frac{1}{4k^2 - 1}$ qui est le terme général d'une série convergente. $\sum(h_k)$ est ainsi normalement convergente sur \mathbb{R} et, par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions,

$$h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

$|\sin|$ est π périodique et paire. Ses coefficients de Fourier "en sinus" sont nuls et ceux "en cosinus" valent

$$a_0(|\sin|) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi}$$

$$\forall k \geq 1, a_k(|\sin|) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| \cos(2kt) dt = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - 4k^2}$$

Pour le calcul de l'intégrale, on peut supprimer la valeur absolue et on utilise la formule $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$.

Comme $|\sin|$ est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, elle est somme de sa série de Fourier sur \mathbb{R} :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{1 - 4k^2} \cos(2kt) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)$$

4.2. On a ainsi $\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(xt)\right) dt$ et comme f est intégrable, on peut découper l'intégrale en deux pour obtenir

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) dt - \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) h(xt) dt$$

$x > 0$ étant fixé, par définition de h , on a

$$\forall t \geq 0, f(t) h(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(t) \cos(2kxt)}{4k^2 - 1}$$

$H_k : t \mapsto \frac{f(t) \cos(2kt)}{4k^2-1}$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^+ et $\sum(H_k)$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers $t \mapsto f(t)h(xt)$ elle même continue sur \mathbb{R}^+ . De plus $|H_k(t)| \leq \frac{|f(t)|}{4k^2-1}$ montre que H_k est intégrable avec

$$\int_0^{+\infty} |H_k(t)| dt \leq \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$$

qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et permet d'écrire que

$$\int_0^{+\infty} f(t)h(xt) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) \cos(2kxt)}{4k^2-1} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k^2-1} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2kxt) dt \right)$$

Posons maintenant $F_k(x) = \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2kxt) dt = \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{2k}\right) \cos(ux) du$ (on a posé $u = 2kt$).

- D'après la partie **2.2**, comme $u \mapsto f\left(\frac{u}{2k}\right)$ est de classe \mathcal{C}^1 alors $F_k(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (on passe du résultat avec e^{ix} à celui avec $\cos(x)$ en passant à la partie réelle).
- $\forall x > 0$, $|F_k(x)| \leq \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. $\sum(F_k)$ est donc normalement convergente sur \mathbb{R}^{+*} (et donc au voisinage de $+\infty$).

Le théorème de double limite s'applique et indique que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)h(xt) dt = 0$$

En combinant tout cela on obtient finalement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, ceci est compatible avec le résultat pour \tilde{E} .

4.3.

4.3.1 Il suffit de poser $u = xt$ pour obtenir

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du$$

Par définition de p et q , on a $p\pi \leq \beta x < (p+1)\pi$ et $q\pi \leq \delta x < (q+1)\pi$. Si $x > \frac{\pi}{\delta-\beta}$ alors $\delta x - \beta x > \pi$; or, $q\pi - (p+1)\pi > \delta x - \beta x$ et donc $q - p + 1 > 1$ ou encore $q > p$. On effectue, avec la relation de Chasles, le découpage suivant :

$$xF(x) = \int_{\beta x}^{(p+1)\pi} |\sin(u)| du + \sum_{k=p+1}^{q-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du + \int_{q\pi}^{\delta x} |\sin(u)| du$$

Par π -périodicité de $|\sin|$, le terme du milieu vaut $(q-p-1) \int_0^\pi |\sin(u)| du = 2(q-p-1)$. Les bornes des intégrales étant dans le bon sens, on peut majorer (resp. minorer) les premier et troisième termes en majorant (resp. minorant) $|\sin(u)|$ par 1 (resp 0). On a alors

$$2(q-p-1) \leq xF(x) \leq 2(q-p-1) + ((p+1)\pi - \beta x) + (\delta x - q\pi) \leq 2(q-p-1) + 2\pi$$

De plus $\frac{\delta x}{\pi} - 1 - \frac{\beta x}{\pi} - 1 \leq q - p - 1 \leq \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi}$ et donc

$$\frac{2(\delta - \beta)}{\pi} - \frac{2}{x} \leq F(x) \leq \frac{2(\delta - \beta)}{\pi} + \frac{2\pi}{x}$$

Par théorème d'encadrement, on a finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$$

4.3.2

- Si f est en escalier sur $J = [a, b]$, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ telle que f est constante (égale à c_i) sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a alors

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\sin(xt)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{p-1} c_k \frac{2(a_{k+1} - a_k)}{\pi}$$

Par ailleurs,

$$\int_J f(t) dt = \sum_{k=0}^{p-1} c_k (a_{k+1} - a_k)$$

et finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

- Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, f est uniformément approchable sur $[a, b]$ par une suite de fonctions en escalier. Soit $\varepsilon > 0$; il existe φ , fonction en escalier, telle que $\|f - \varphi\|_{\infty, J} \leq \varepsilon$. D'après le premier cas, il existe x_0 tel que si $x > x_0$, $|\tilde{\varphi}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi| \leq \varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a alors

$$\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| \leq \left| \tilde{f}(x) - \tilde{\varphi}(x) \right| + \left| \tilde{\varphi}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi \right| + \left| \frac{2}{\pi} \int_J \varphi - \int_J f dt \right|$$

Par choix de x , le second morceau est plus petit que ε . Le troisième est plus petit que $\frac{2}{\pi}|b - a|\varepsilon$. Le premier est majoré par $\int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt$ et donc par $(b - a)\varepsilon$. On a donc

$$\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| \leq \left(\frac{2}{\pi}|b - a| + |b - a| + 1 \right) \varepsilon$$

En revenant à la définition des limites, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

- Supposons f est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ . Soit $\varepsilon > 0$; comme en **2.1** on trouve un A tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$. D'après le cas précédent, il existe x_0 tel que si $x > x_0$ on a $\left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f \right| \leq \varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a alors

$$\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t)| + \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f \right| + \frac{2}{\pi} \int_0^A |f|$$

Avec les choix faits, on a alors

$$\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \left(2 + \frac{2}{\pi} \right) \varepsilon$$

En revenant à la définition des limites, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) dt$$