CCP PSI - 2010
Mathématiques 2 : un corrigé

Pemière partie.

1.1. Le polynôme caractéristique de l est

$$\chi_l = \det(M - XI_2) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

Les valeurs propres de l sont les racines de χ_l et donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (valeurs distinctes puisque $\theta \in]0, \pi[$).

1.2. On doit prendre garde au fait que (v_1, v_2) n'est pas une base orthogonale (elle est normée mais v_1 et v_2 ne sont pas orthogonaux). On a

$$\|v\|^2 = x_1^2\|v_1\|^2 + 2x_1x_2(v_1|v_2) + x_2^2\|v_2\|^2 = x_1^2 + 2\cos(\theta)x_1x_2 + x_2^2$$

De plus, $l(v) = -x_2\varepsilon_1 + (x_1 + 2x_2\cos(\theta))\varepsilon_2$ et on peut reprendre le calcul avec ces nouvelles coordonnées pour obtenir

$$\|l(v)\|^2 = x_1^2 + 2\cos(\theta)x_1x_2 + x_2^2$$

l est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui conserve la norme : c'est un automorphisme orthogonal.

1.3. Par définition, on connaît P et on en déduit P^{-1} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par formule de changement de base on a alors

$$M' = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

l est donc la rotation d'angle θ.

1.4.

1.4.1 Comme l conserve la norme, une récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|v_k\| = \|v_1\| = 1$$

En utilisant 1.2, on a une autre expression de $\|v_k\|$ et donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k^2 + b_k^2 + 2a_kb_k\cos(\theta) = 1$$

1.4.2 v_k s'obtient à partir de v_1 en composant $k-1$ fois par l c'est à dire en appliquant la rotation d'angle $(k-1)\theta$. En notant v_1' un vecteur normé directement orthogonal à v_1 on a donc $v_k = \cos((k-1)\theta)v_1 + \sin((k-1)\theta)v_1'$ et ainsi

$$(v_k|v_1) = \cos((k-1)\theta)$$

Pour $k \geq 2$, on a, l étant un automorphisme ortogonal

$$(v_2|v_k) = (l(v_1)|l(v_{k-1})) = (v_1|v_{k-1}) = \cos((k-2)\theta)$$

Pour $k = 1$ la formule reste vraie puisque $(v_2|v_1) = \cos(\theta) = \cos(-\theta)$.

1.4.3 On a aussi, en utilisant $(v_1|v_2) = \cos(\theta)$,

$$(v_1|v_k) = a_k + \cos(\theta)b_k \quad \text{et} \quad (v_2|v_k) = \cos(\theta)a_k + b_k$$

On a donc le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos((k-1)\theta) \\ \cos((k-2)\theta) \end{pmatrix}$$

C'est un système de Cramer (matrice inversible puisque de déterminant $1 - \cos^2(\theta) \neq 0$) qui a une unique solution. Il suffit donc de vérifier que la solution proposée est la bonne ce qui découle des formules de trigonométrie. Par exemple, pour la première équation, on est ramené à

$$\cos((k-1)\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin((k-1)\theta) = -\sin((k-2)\theta)$$

qui provient de $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
On prouve ainsi que

$$a_k = -\frac{\sin((k-2)\theta)}{\sin(\theta)} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

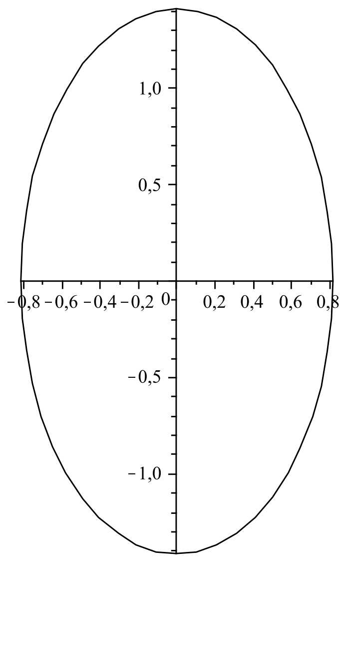
2.1. On a immédiatement $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (0,1)$ et $A_3 = (-1, 2\cos(\theta))$. On doit donc imposer $p = r = 1$ et $-2q\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta) = 0$ soit $q = 2\cos(\theta)$ (c'est équivalent car $\cos(\theta) \neq 0$). Notre conique a donc pour équation

$$x^2 + 2\cos(\theta)xy + y^2 = 1$$

La relation de 1.4.1 donne alors directement que tous les A_k sont sur la conique.

2.2. On a immédiatement que $(1,1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \cos(\theta)$ et que $(1,-1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $1 - \cos(\theta)$. Les valeurs propres étant distinctes et l'espace étant de dimension 2, on n'a que deux valeurs et deux espaces propres qui sont des droites.
La matrice Q est la matrice de la partie quadratique de la conique. Comme Q possède deux valeurs propres de même signe, la conique est une ellipse. Prenons comme nouvelle base (e_1, e_2) avec $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Dans le nouveau repère (O, e_1, e_2), l'équation de l'ellipse est

$$(1 + \cos(\theta))X^2 + (1 - \cos(\theta))Y^2 = 1$$



Seconde partie.

1.1. $(u, l(u), \dots, l^n(u))$ est une famille de $n+1$ vecteurs de E qui est de dimension n et cette famille est donc liée. L'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N} /\ (u, l(u), \dots, l^k(u)) \text{ est liée}\}$$

est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum $r(l,u)$.

1.2. u étant non nul, $r(l,u) \geq 1$ (la famille (u) est libre et $0 \notin A$). On a de plus vu que $n \in A$ et on a donc aussi $r(l,u) \leq n$.

1.3. Si $r(l,u) = 1$ alors $(u, l(u))$ est liée. Comme $u \neq 0$, cela se traduit par l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $l(u) = \lambda u$ et u est vecteur propre de l. Réciproquement, si u est vecteur propre alors $(u, l(u))$ est liée et $1 \in A$. Comme $0 \notin A$ on a alors $r(l,u) = 1$.
Si $r(l,u) = n$ alors $n-1 \notin A$ et la famille $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est libre. Comme elle possède n élément et que E est de dimension n, c'est une base de E. Réciproquement, si $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E alors $n-1 \notin A$ et donc $r(l,u) \geq n$. Comme $r(l,u) \leq n$, on a en fait une égalité.

2. La trace de f est la somme des coefficients diagonaux de la matrice et $\det(f)$ son déterminant que l'on peut calculer avec une machine (par exemple). On obtient

$$\det(f) = 4 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(f) = 6$$

On a directement (les coordonnées s'entendent dans la base $\mathcal{B}$)

$$e_1 = (1,0,0,0),\ f(e_1) = (1,1,1,1),\ f^2(e_1) = (2,1,0,-1)$$

Si $ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1) = 0$ alors $b = 0$ (troisième coordonnée) puis $c = 0$ (seconde coordonnée) puis $a = 0$. La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est donc libre. On obtient aussi

$$f^3(e_1) = (5,-1,-5,-9) = 2e_1 - 5f(e_1) + 4f^2(e_1)$$

et $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est liée. Par définition,

$$r(f, e_1) = 3$$

3.1. On a immédiatement

$$Mat_{\mathcal{B}(u)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La trace est la somme des éléments diagonaux et le déterminant s'obtient en développant par rapport à la première ligne :

$$\operatorname{tr}(f) = a_{n-1} \quad \text{et} \quad \det(f) = (-1)^{n+1} a_0$$

3.2. L'opération proposée laisse invariant le déterminant et amène à

$$\det(l - \lambda id) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1} a_i - \lambda^n \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première ligne donne ensuite

$$\det(f - \lambda id) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1} a_i \right)$$

4.1. Un idéal d'un anneau commutatif A est un sous-groupe de A qui est stable par multiplication par un élément de A. On rapelle aussi que l'application $P \mapsto P(l)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ ce qui indique en particulier que $(PQ)(l) = P(l) \circ Q(l)$.

- $\mathcal{I}(l,u)$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ qui est non vide (elle contient le polynôme nul par exemple, ou encore le polynôme caractéristique de l avec le théorème de Cayley-Hamilton).
- Si $P, Q \in \mathcal{L}(I,u)$ alors $(P+Q)(l)(u) = (P(l) + Q(l))(u) = P(l)(u) + Q(l)(u) = 0$. Ainsi, $P + Q \in \mathcal{L}(I,u)$.
- Si $P \in \mathcal{L}(I,u)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $(PQ)(l)(u) = (QP)(l)(u) = Q(l) \circ P(l)(u) = Q(l)(0) = 0$ et $PQ \in \mathcal{L}(I,u)$.

Les deux premiers points donnent la structure de sous-groupe et avec le troisième on a celle d'idéal.

Le cours nous indique que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont *principaux* c'est à dire du type $P\mathbb{K}[X]$ (ensemble des multiples de P). $\mathcal{I}(l,u)$ est donc l'ensemble des multiples d'un polynôme P (non nul car il y a dans $\mathcal{I}(l,u)$ un polynôme non nul : le polynôme caractéristique de l). En divisant P par son coefficient dominant on se ramène au cas où P est unitaire (et on ne change pas l'ensemble de ses multiples).

Si $G(l,u)$ convient, c'est un multiple unitaire de P et donc c'est forcément P.

On a ainsi prouvé qu'il existe un unique polynôme unitaire $G(l,u)$ tel que

$$\mathcal{I}(l,u) = G(l,u)\mathbb{K}[X]$$

4.2. Comme $\chi_l \in \mathcal{I}(l,u)$ (avec le théorème de Cayley-Hamilton qui donne $\chi_l(l) = 0$), χ_l est multiple de $G(l,u)$.

Soit d le degré de $G(l,u)$; on peut donc écrire $G(l,u) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ et $G(l,u) \in \mathcal{I}(l,u)$ s'écrit

$$l^d(u) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k l^k(u)$$

d'où l'on tire que $d \geq r(l,u)$ (puisque $(u, l(u), \ldots, l^d(u))$ est liée).

Par ailleurs, si $l^k(u)$ est combinaison linéaire de $(u, \ldots, l^{k-1}(u))$, il existe des b_k tels que $l^k(u) = b_0 u + \cdots + b_{k-1} l^{k-1}(u)$ et donc $X^k - b_{k-1}X^{k-1} - \cdots - b_0 \in \mathcal{I}(l,u)$ et est multiple non nul de $G(l,u)$. On a ainsi $k \geq d$. On peut appliquer ceci avec $k = r(l,u)$ ($(u, l(u), \ldots, l^{k-1}(u))$ est alors libre et $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ liée donc $l^k(u)$ est combinaison linéaire de $(u, \ldots, l^{k-1}(u))$) pour obtenir $r(l,u) \geq d$.

On a montré que

$$r(l,u) = \deg(G(l,u))$$

4.3. Avec l'analyse précédente, on obtient $G(f, e_1)$ grâce à la combinaison linéaire de $e_1, e(e_1), f^2(e_1)$ donant $f^3(e_1)$:

$$G(l, e_1) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-2)(X-1)^2$$

Le polynôme caractéristique est multiple de $G(l, e_1)$ et admet donc 2 et 1 comme racines avec des multiplicités au moins égales à 1 (pour 2) et 2 (pour 1). Il s'écrit donc (son coefficient dominant vaut 1 car on est en dimension 4) $(X-a)(X-2)(X-1)^2$. Avec le déterminant (ou la trace) on trouve que $a = 2$ et donc que

$$\chi_f = (X-1)^2(X-2)^2$$

Les valeurs propres de f sont ainsi 1 et 2.

Si f était diagonalisable, on aurait $(X-1)(X-2)$ qui annule f et donc $G(f,u)$ de degré ≤ 2 ce qui est faux. f n'est donc pas diagonalisable.

4.4. La situation est la même que ci-dessus et on obtient $G(l,u)$ grâce à la combinaison linéaire de $u,\dots,l^{n-1}(u)$ donnant $l^n(u)$:

$$G(l,u) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

χ_l est multiple de $G(l,u)$ et de coefficient dominant $(-1)^n$, c'est donc que

$$\chi_l = (-1)^n G(l,u) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$$

5.1. X^p annulant l, 0 est la seule valeur propre complexe possible pour l. Comme les racines de χ_l sont valeurs propres et que χ_l est scindé sur $\mathbb{C}$ (comme tout polynôme) et de coefficient dominant $(-1)^n$ et de degré n, c'est que

$$\chi_l = (-1)^n X^n$$

5.2. Supposons qu'il existe u non nul tel que $r(l,u) = n$. $G(l,u)$ est de degré n et donc $X^{n-1} \notin \mathcal{I}(l,u)$ ce qui donne $l^{n-1}(u) \neq 0$ et donc a fortiori $l^{n-1} \neq 0$.
Réciproquement, si $l^{n-1} \neq 0$, il existe u tel que $l^{n-1}(u) \neq 0$. On a alors $X^{n-1} \notin \mathcal{I}(l,u)$ et donc X^{n-1} qui n'est pas multiple de $G(l,u)$. Or, $G(l,u)$ est un diviseur unitaire de χ_l et est donc égal à $X^{r(l,u)}$. X^{n-1} n'en étant pas un multiple, $r(l,u) \geq n$. Comme on a l'inégalité inverse de manière générale, on en déduit que $r(l,u) = n$.

6.1. Une récurrence immédiate sur j montre que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ l^j(u) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j w_k$$

On en déduit que

$$Pass(\mathcal{W}, \mathcal{B}(u)) = \begin{pmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \dots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{pmatrix}$$

Si deux λ_i sont égaux alors la matrice précédentes est non inversible (deux lignes égales) ce qui est exclus (c'est une matrice de passage et donc inversible). Les valeurs propres sont donc deux à deux distinctes.

6.2.

6.2.1 La nullité de AC se traduit par

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k = 0$$

c'est à dire que tous les λ_i sont racines de $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. P est alors nul (polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant au moins n racines) et $\forall i,\ \alpha_i = 0$. On a donc l'endomorphisme canoniquement associé à A qui est injectif et, comme on est en dimension finie, bijectif. A est ainsi inversible.

6.2.2 Si on pose $u = w_1 + \dots + w_n$, A est la matrice de $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ dans la base $\mathcal{W}$ et son inversibilité montre que $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E. En particulier $r(l,u) \geq n$ et comme on a l'inégalité inverse en général, c'est que

$$r(l,u) = n$$