CCP PSI - 2010
Mathématiques 1 : un corrigé

Première partie.

Définition d'une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.1. B est clairement symétrique et linéaire par rapport à sa seconde variable. De plus $B(P,P) \geq 0$ et n'est nul que si $\forall i \in [|0,n|],\ P(x_i) = 0$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut en déduire que $P = 0$ (un polynôme non nul de degré n admettant au plus n racines). Ainsi, B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Le résultat est faux sur $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $P = \prod_{k=0}^{n}(X - x_k) \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est non nul mais vérifie $B(P,P) = 0$.

1.2. On a immédiatement

$$L_k(x_j) = \delta_{k,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \ k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right)\}$$

On en déduit que

$$\forall k, i \in [|0,n|],\ B(L_k, L_i) = L_i(x_k) = \delta_{j,i}$$

ce qui montre que $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est en particulier une famille et comme elle a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments qui sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est une b.o.n. de $\mathbb{R}_n[X]$.

Définition de $P_n(f)$.

2.1. Avec la question 1.2, on a

$$\forall k \in [0,n|],\ B(f, L_k) = f(x_k)$$

On en déduit que

$$\forall k \in [|0,n|],\ P_n(f)(x_k) = B(f, L_k) = f(x_k)$$

2.2. $P_n(f)$ est, on vient de le voir, un polynôme convenable. Si P en est un autre alors P_P_n est nul car c'est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui a strictement plus de n racines.

2.3. Les règles de calcule en b.o.n. montre que

$$\forall f \in \mathbb{R}_n[X],\ f = \sum_{i=0}^{n} B(f, L_i) L_i = P_n(f)$$

$P = \sum_{k=0}^{n} L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall i,\ P(x_i) = 1$. D'après la question précédente, $P = 1$ car 1 est un autre élément de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant les mêmes propriétés. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$$

Une application linéaire.

3.1. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $N_\infty(f) \leq 1$. En particulier, $\forall i,\ |f(x_i)| \leq 1$ et donc

$$\forall x \in [a,b],\ |\Lambda(f)(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)||L_i(x)| \leq |\Phi(x)| \leq N_\infty(\Phi)$$

Le majorant est indépendant de x et un passage à la borne supérieure donne $N_\infty(\Lambda(f)) \leq N_\infty(\Phi)$. Cette fois, le majorant est indépendant de f et en passant à la borne supérieure, on obtient

$$\|\Lambda\| \leq N_\infty(\Phi)$$

3.2. $t \mapsto \Phi(t)$ est continue et est donc bornée sur le SEGMENT $[a,b]$ ET elle atteint ses bornes. On a donc
$$\exists\, \tau \in [a,b],\ N_\infty(\Phi) = \Phi(\tau)$$

3.3. On a
$$\Lambda(\psi)(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \psi(x_k) L_k(\tau) = \sum_{k=0}^{n} |L_k(\tau)| = \Phi(\tau) = N_\infty(\Phi)$$
Ainsi, $\Lambda(\psi)(\tau) \leq N_\infty(\Lambda(\psi))$. Par ailleurs, ψ est continue sur $[a,b]$ et est comprise entre -1 et -1 de par sa définition (son graphe est composé de segment reliant des points d'ordonnées 1 e ou -1). On a donc $N_\infty(\Lambda(\psi)) \leq \|\Lambda\|$, on en déduit que $N_\infty(\Phi) \leq \|\Lambda\|$. L'autre inégalité ayant été prouvée, on a finalement
$$\|\Lambda\| = N_\infty(\Phi)$$

Un résultat auxiliaire.

4.1. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction g sur $[c_i, c_{i+1}]$ pour obtenir un point d'annulation de g' sur $]c_i, c_{i+1}[$. On a ainsi p points d'annulation distincts (les intervalles ouverts sont disjoints) pour g'.

4.2. On montre par récurrence que la propriété "$g^{(k)}$ s'annule au moins $p+1-k$ fois sur $[a,b]$" est vraie pour tout $k \in [|0,p|]$.

- Initialisation : le résultat est vrai par hypothèse sur g au rang 0 (et on vient même de le prouver au rang 1).
- Hérédité : soit $n \in [|0, p-1|]$ tel que le résultat est vrai au rang n. $g^{(n)}$ s'annulant au moins $p+1-n$ fois, on peut comme à la question précédente utiliser le théorème de Rolle pour montrer que sa dérivée s'annule au moins $p-n$ fois. On a donc $g^{(p+1)}$ qui s'annule au moins $p+1-(n+1)$ fois et le résultat est vrai au rang n.

En particulier, l'hypothèse au rang p montre que $g^{(p)}$ s'annule au moins 1 fois.

Une expression de $f - P_n$.

5.1. $P_{n+1} - P_n$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ s'annulant en $x_0, \dots, x_n$. Il est factorisable par T_{n+1} et, par degré, il existe une constante r telle que
$$P_{n+1} - P_n = r T_{n+1}$$

5.2. $g = f - P_{n+1}$ s'annule au au moins $n+1$ points distincts ($x_0, \dots, x_n$ et y) et il existe donc, avec 4.2, $\beta \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(\beta) = 0$. Par ailleurs, P_{n+1} est de degré $n+1$ et sa dérivée $n+1$-ième est donc une constante égale à son coefficient en x^{n+1} fois $(n+1)!$. Ce coefficient vaut r d'après la question précédente et on a donc
$$\exists\, \beta \in [a,b] / \ f^{(n+1)}(\beta) = r(n+1)!$$
On en déduit alors que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} T_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\beta)$$
En appliquant ce résultat avec $x = y$, on obtient le résultat voulu dans le cas où $y \in [a,b]$ est différent des x_i. Si y est égal à l'un des x_i, il reste vrai (il se lit $0 = 0$ et on peut choisir n'importe quel β).

5.3. La question précédente traitait déjà le cas où $y = x_i$ (elle stipulait $\forall y \in [a,b]$ et les x_i sont dans $[a,b]$).

Seconde partie.

Etude du maximum de φ.

1.1. φ est continue sur le SEGMENT $[0,n]$ et admet donc un maximum sur ce segment.

1.2. Soit $t \in [0,n]$; on a (on pose $j = n-k$)

$$\varphi(n-t) = \left|\prod_{k=0}^{n}((n-t)-k)\right| = \prod_{k=0}^{n}|n-k-t| = \prod_{j=0}^{n}|j-t| = \left|\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right| = \varphi(t)$$

1.3. Pour tout t, on a (en posant $j = k+1$)

$$\varphi(t-1) = \prod_{k=0}^{n}|t-1-k| = |t-n-1|\prod_{j=1}^{n}|t-j|$$

Pour $t \notin \mathbb{N}$, $\varphi(t)$ est non nul et en divisant par $\varphi(t)$ on obtient

$$\forall t \notin \mathbb{N},\ \frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)} = \frac{|t-n-1|}{|t|}$$

On a $\frac{t-n-1}{t} = 1 - \frac{n+1}{t}$ qui croît sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sur $[1, n/2]$, elle varie entre $-n$ et $-1-\frac{2}{n}$ et a donc une valeur absolue plus grande que 1 :

$$\forall t \in \left[1, \frac{n}{2}\right],\ \frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)} \geq 1$$

Il suffit de multiplier par $\varphi(t) \geq 0$ pour obtenir l'inégalité demandée.

1.4. D'après la question 1.2, le maximum de φ sur $[0,n]$ est atteint en un point x_0 de $[0,n/2]$ (quand t varie dans $[0,n/2]$, $n-t$ varie dans $[0,n/2]$ aussi et on a donc $\varphi([0,n/2]) = \varphi([n/2,n])$). Si $x_0 \geq 1$ alors la question précédente montre que $\varphi(x_0-1) \geq \varphi(x_0)$ et, en itérant le processus, que $\varphi(x_0 - E(x_0)) \geq \varphi(x_0)$. Comme $\varphi(x_0 - E(x_0))$ est le maximum de φ sur $[0,n]$ et que $x_0 - E(x_0) \in [0,1[\subset [0,n]$, l'inégalité est une égalité. Dans les deux cas, on a trouvé un point de $[0,1]$ où φ atteint son maximum.

Abscisse du maximum de φ.

2.1. Pour $t \notin \mathbb{N}$, les propriétés de morphisme de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ donnent

$$\ln(\varphi(t)) = \sum_{k=0}^{n}\ln(|t-k|)$$

En dérivant cette expression sur l'interalle $]E(t), E(t)+1[$, on a alors

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}$$

2.2. Si $t < 1$ et $k \geq 2$ alors $t-k < 0$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k} < 0$ (somme de tels termes). Par ailleurs (termes pour $k=0$ et $k=1$), $\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} = \frac{2t-1}{t(t-1)}$ est négatif quand $t \in [1/2, 1[$. En sommant, on obtient

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[,\ \varphi'(t) < 0$$

2.3. La fonction $g\ :\ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$ est dérivable sur $]0,1[$ de dérivée $g'\ :\ t \mapsto -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t-k)^2}$. g est donc strictement décroissante sur $]0,1[$ (dérivée strictement négative sur l'intervalle). g admet donc au plus un point d'annulation (la stricte monotonie entraîne l'injectivité). Avec la question 2.1, il en est de même pour φ.

2.4. φ atteint son maximum en un point de $[0,1]$ mais ce n'est ni en 0 ni en 1 (car en ces points φ est nulle et il existe des points où elle est > 0). Elle atteint donc son maximum en un point de l'ouvert $]0,1[$. Comme φ est dérivable sur cet ouvert, le maximum est atteint en un point critique (de dérivée nulle) et ce n'est pas sur $[1/2,1[$ avec la question 2.2. C'est donc un point de $]0,1/2[$ et il y en a au plus un d'après 2.3. Finalement, φ atteint son maximum en un unique point $t_n \in]0,1/2[$. En ce point, φ est de dérivée nulle et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k} = 0$$

Etude de l'abscisse t_n du maximum de φ.

3.1. Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k-t_n} - \frac{1}{k} = \frac{t_n}{k(k-t_n)} > 0$ et donc

$$\frac{1}{k-t_n} > \frac{1}{k}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n-k} = 0$, on en déduit que

$$\frac{1}{t_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3.2. $\sum(1/k)$ est une série de Riemann divergente. Comme elle est positive, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ et on a donc, par minoration

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n} = +\infty \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = 0$$

Une majoration de φ.

4.1. $\frac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\forall k \geq 1,\ \forall t \in [k,k+1],\ \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En intégrant cette ingéalité puis en sommant de $k=2$ à $k=n$, on obtient

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

De plus $\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln(2) < 1$ car $e > 2$ et donc, en ajoutant cette inégalité stricte

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

4.2. On en déduit alors que

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{t_n}$$

Le passage à l'inverse étant une opération strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a finalement

$$t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}$$

4.3. On a alors

$$\forall t \in [0,n],\ \varphi(t) \le \varphi(t_n) = \prod_{k=0}^{n} |t_n - k| = t_n \prod_{k=1}^{n} (k - t_n) \le t_n \prod_{k=1}^{n} k \le n! t_n < \frac{n!}{\ln(n+1)}$$

Une majoration de $N_\infty(f - P_n)$.

5.1. On a

$$|T_{n+1}(x)| = \prod_{i=0}^{n} |a + ht - a - ih| = h^{n+1} \prod_{i=0}^{n} |t - i| = h^{n+1}\varphi(t)$$

5.2. D'après la relation (1) de la question $I.5.$ on a

$$N_\infty(f - P_n) \le \frac{1}{(n+1)!} N_\infty(T_{n+1}) N_\infty(f^{(n+1)})$$

Les questions précédentes indiquent que $N_\infty(T_{n+1}) \le h^{n+1} N_\infty(\varphi) = h^{n+1}\varphi(t_n) \le \frac{h^{n+1} n!}{\ln(n+1)}$ et ainsi

$$N_\infty(f - P_n) \le \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} N_\infty(f^{(n+1)})$$

Troisième partie.

1. On a directement

$$T_{n+1}(x) = \frac{1}{w_k} L_k(x)(x - x_k)$$

2. On a, avec $I.2.1$ et la question précédente,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k} T_{n+1}(x)$$

Par ailleurs, avec la partie I,

$$T_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$$

et on en déduit en combinant les deux précédentes relations que

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k}}$$

3.

3.1. On a $x_k - x_i = h(k - i)$ et donc

$$w_k = \frac{1}{\prod_{i \ne k} h(k-i)} = \frac{1}{h^n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)} \frac{1}{\prod_{i=k+1}^{n}(k-i)} = \frac{1}{h^n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

et ainsi

$$w_k^* = (-1)^n h^n n! w_k = (-1)^k \binom{n}{k}$$

3.2. On reprend la formule (4) en remplaçant w_k par $(-1)^n \frac{w_k^*}{h^n n!}$:

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{w_k^* f(x_k)}{x-x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{w_k^*}{x-x_k}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f(x_k)}{x-x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x-x_k}}$$

4.

4.1. On a $a = x_0 = -2n$, $b = x_{4n} = 2n$ et $h = \frac{b-a}{4n} = 1$ et donc

$$x_k = a + kh = -2n + k$$

4.2. Si on choisit $f(x) = \cos(\pi x/2)$, on a $f(x_k) = \cos(-n\pi + \frac{k\pi}{2}) = (-1)^n \cos(\frac{k\pi}{2})$ et donc $f(x_{2k}) = (-1)^{n+k}$ et $f(x_{2k+1}) = 0$. Si on applique la formule de $III.3.2$ avec la fonction f et les points $(-2n + j)$ pour $j = 0..4n$, on obtient le polynôme

$$P_{4n}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{2n} (-1)^{2j} \binom{4n}{2j} \frac{(-1)^{n+j}}{x-x_{2j}}}{\sum\limits_{j=0}^{4n} (-1)^{j} \binom{4n}{j} \frac{1}{x-x_j}} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{2n} (-1)^{2j} \binom{4n}{2j} \frac{(-1)^{n+j}}{x-(-2n+2j)}}{\sum\limits_{j=0}^{4n} (-1)^{j} \binom{4n}{j} \frac{1}{x-(-2n+j)}}$$

On pose $k = j - n$ au numérateur et $k = j - 2n$ au dénominateur :

$$P_{4n}(x) = \frac{\sum\limits_{k=-n}^{n} (-1)^{2k+2n} \binom{4n}{2k+2n} \frac{(-1)^{k+2n}}{x-2k}}{\sum\limits_{j=-2n}^{2n} (-1)^{k+2n} \binom{4n}{k+2n} \frac{1}{x-k}} = \frac{\sum\limits_{k=-n}^{n} (-1)^{k} \binom{4n}{2k+2n} \frac{1}{x-2k}}{\sum\limits_{j=-2n}^{2n} (-1)^{k} \binom{4n}{k+2n} \frac{1}{x-k}}$$

4.3. On a

$$\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| = \prod_{k=-2n}^{p} (x-k) \prod_{k=p+1}^{2n} (k-x) \leq \prod_{k=-2n}^{p} (p+1-k) \prod_{k=p+1}^{2n} (k-p)$$

Dans le premier produit, on multiplie les etiers entre 1 et $2n+p+1$ et dans le second entre 1 et $2n-p$ et on a donc

$$\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| \leq (2n+p+1)!(2n-p)!$$

4.4. On utilise la formule (1) de $I.5.2$ pour obtenir (sachant que $f^{(k)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \cos(\frac{\pi x}{2} + k\pi)$ et donc $N_\infty(f^{(k)}) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^k$)

$$|f(x) - P_{4n}(x)| \leq \frac{1}{(4n+1)!} \prod_{k=0}^{4n} |x - x_k| N_\infty(f^{(4n+1)}) \leq \frac{1}{(4n+1)!} \prod_{k=0}^{4n} |x + 2n - k| \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}$$

Dans le produit, on pose $j = k - 2n$ pour se ramener à la question précédente et obtenir

$$|f(x) - P_{4n}(x)| \leq \frac{1}{(4n+1)!}(2n+p+1)!(2n-p)! \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1} = \theta(n,p)$$

On a

$$\frac{|\theta(n+1,p)|}{|\theta(n,p)|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^4}{(4n)^4} \frac{\pi^4}{2^4} = \frac{\pi^4}{4^4}$$

qui est une suite de limite < 1. Par règle de D'Alembert, $\sum(\theta(n,p))_{n\geq 0}$ est une séie absolument convergente. En particulier, elle ne diverge pas grossièrement et

$$\lim_{n\to+\infty} \theta(n,p) = 0$$