CCP PSI 1 - 2009
Un corrigé

1 Etude de la fonction φ.

1.1. $d \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall t,\ d'(t) = 1 - \sin(t) \geq 0$. d est donc croissante sur $\mathbb{R}$. La croissance est même stricte car d' ne s'annule que sur $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. d réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On remarque que

$$\forall t \geq 0,\ d(t) \geq d(0) \geq 0$$

En particulier (quand on divise par $t > 0$ on ne change pas le sens des inégalités)

$$\forall t > 0,\ \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq 1$$

et bien sûr $\frac{1-\cos(t)}{t} \geq 0$ provient (pour $t > 0$) de la positivité des numérateur et dénominateur.

1.2. δ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t,\ \delta'(t) = t - \sin(t) \text{ et } \delta''(t) = 1 - \cos(t)$$

En particulier δ'' est positive, δ' croît et est positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \geq 0,\ \delta(t) \geq \delta(0) \geq 0$$

On conclut comme plus haut que

$$\forall t > 0,\ 0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2. $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$. Au voisinage de 0^+, la fonction est bornée (on vient de le voir ; on montrerait aisément que la fonction est prolongeable par continuité par la valeur 1/2) et donc intégrable. Au voisinage de $+\infty$, elle est $O(1/t^2)$ et donc aussi intégrable. Elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.
Si $x \geq 0$, $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dominée par $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ dont on vient de voir l'intégrabilité. Par comparaison, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x)$ existe a fortiori.

3.1. On a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} (e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t})\, dt$$

Si $x_1 \leq x_2$, la fonction intégrée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. φ est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme elle est minorée (par 0) elle admet une limite finie en $+\infty$ (théorème de limite monotone).

3.2. D'après 1.2 on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ 0 \leq \varphi(x) \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{\beta}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

4.1. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

- $\forall x \geq 0,\ \forall t > 0,\ \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4.2. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}$
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall a > 0,\ \forall x \geq a,\ \left|-\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}\right| \leq \alpha e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}\ dt$$

4.3. D'après 1.1 on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ 0 \leq -\varphi'(x) \leq \alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt = \frac{\alpha}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$$

4.4. Il s'agit à nouveau d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (conséquence du théorème utilisé en 4.2)
- $\forall t > 0,\ x \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto (1-\cos(t))e^{-xt}$
- $\forall x > 0,\ t \mapsto (1-\cos(t))e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall a > 0, \forall x \geq a,\ \left|(1-\cos(t))e^{-xt}\right| \leq 2e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-xt}\ dt$$

4.5. On a $1-\cos(t) = \mathrm{Re}(1-e^{it})$ et donc (par linéarité du passage à l'intégrale)

$$\begin{aligned}\forall a > 0, \int_0^a (1-\cos(t))e^{-xt}\ dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^a (e^{-xt} - e^{t(i-x)})\right) \\ &= -\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-xt}}{x} + \frac{e^{t(i-x)}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=a}\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ pour $x > 0$ fixé, on obtient

$$\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{i-x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

4.6. Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c = 0$ et donc

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

On remarque que

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi'(x) = -\infty$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, un corollaire des accroissements finis indique que φ n'est pas dérivable en 0 mais que sa courbe présente en 0 une demi-tangente verticale.

5.1. On a

$$x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = -x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

5.2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan(x))$$

et ceci représente une primitive de la fonction continue $t\mapsto \ln(1+t^2)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par théorème fondamental.

5.3. On en déduit, avec l'expression de φ', l'existennce d'une constante c telle que

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \varphi(x) &= x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c\\ &= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \arctan(x) + c\end{aligned}$$

Avec 5.1 et 3.2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c=\pi/2$ et donc

$$\forall x>0,\ \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

5.4. φ étant continue en 0, on obtient

$$\varphi(0) = \lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

2 Etude de l'existence de J_m.

1. $t\mapsto \frac{\sin^m(t)}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et équivaut à t^{m-1} au voisinage de 0. Pour $m\geq 1$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 et finalement intégrable sur $[0,\pi/2]$ (et a fortiori, son intégrale existe).
2. Une intégration par parties donne

$$\forall 0<a<b,\ \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

   L'intégrale du membre de droite ainsi que le terme tout intégré admettent des limites en 0 et $+\infty$. En opérant les passages à la limite $a\to 0$ et $b\to+\infty$, on a donc

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. $t\mapsto e^{ikt}$ est continue sur $[\pi/2,+\infty[$ et $t\mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. On peut opérer une intégration par parties pour obtenir

$$\forall k\neq 0,\ \forall a\geq \pi/2,\ \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt}\right]_{\pi/2}^a + \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{ikt^2}\,dt$$

   Comme $\left|\frac{e^{ikt}}{ikt^2}\right| \leq \frac{1}{|k|t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, l'intégrale du membre de droite admet une limite quand $a\to\infty$. De même, le terme "tout intégré" est de limite nulle en $+\infty$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir l'existence de I_k.
   Si $k=0$ alors la fonction à considérer est $t\mapsto 1/t$ et c'est une fonction de Riemann non intégrable au voisinage de 0. Comme elle est positive, son intégrale n'existe pas. Finalement,

$$I_k \text{ existe si et seulement si } k \neq 0$$

4.1. On a

$$\sin^m(t) = \frac{(e^{it} - e^{-it})^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Par linéarité du passage à l'intégrale, on a donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^m(t)}{t}\, dt = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k I_{m-2k}(x)$$

4.2. Si $m = 2p + 1$, on obtient

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2^{2p+1} i (-1)^p} \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k I_{2(p-k)+1}(x)$$

$2(p-k)+1$ étant impair est non nul et tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \to +\infty$. On peut ainsi passer à la limite aussi dans le membre de gauche ce qui donne l'existence de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$. Avec la question 1, on a finalement l'existence de J_{2p+1}.

4.3. Pour $m = 2p$, on a cette fois

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k I_{2(p-k)}(x)$$

Dans le membre de droite, tous les termes admettent une limite quand $x \to +\infty$ sauf celui pour $k = p$ qui tend vers $+\infty$ (en rentrant le facteur dans la somme et puisque $I_0(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$). On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\, dt = +\infty$$

et J_{2p} n'existe pas.

3 Calcul de J_{2p+1}.

1.1. La fonction h_x est paire (le raccord se fait bien en $-\pi$) et ainsi,

$$\forall n,\ b_n(h_x) = 0$$

De plus

$$\forall n,\ a_n(h_x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\pi} t\right) \cos(nt)\, dt$$

Comme $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, le calcul de l'intégrale est aisé ($n \pm \frac{x}{\pi}$ est non nul par hypotèse sur x) et donne

$$\forall n,\ a_n(h_x) = 2\frac{(-1)^n x \sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2}$$

1.2. Comme h_x est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, sa série de Fourier est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ vers h_x et donc (avecla convention de l'énoncé, c'est $a_0/2$ qui intervient dans la série de Fourier)

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h_x(t) = \frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2} \cos(nt)$$

Pour $t = 0$, on obtient

$$\frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2} = 1$$

2.1. f étant continue sur le segment $[-1,1]$ est bornée sur ce segment et

$$|\gamma_n| \leq \|f\|_\infty \int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{dt}{t} = \|f\|_\infty \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+n\pi}{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}\right)$$

La quantité dans le logarithme est de limite 1 quand $n \to +\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$$

2.2. Le changement de variable $u = t - n\pi$ donne (compte-tenu de l'imparité de f)

$$\gamma_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f((-1)^n \sin(u))}{u+n\pi}\, du = (-1)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\, du$$

Par ailleurs, en posant $v = -u$, on a

$$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\, du = -\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(v))}{-v+n\pi}\, du$$

On en déduit que

$$\gamma_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \left(\frac{f(\sin(u))}{u+n\pi} - \frac{f(\sin(u))}{-u+n\pi}\right) du = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{-2uf(\sin(u))}{(u+n\pi)(-u+n\pi)}\, du$$

ou encore

$$\gamma_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{2uf(\sin(u))}{u^2-n^2\pi^2}\, du = \mu_n$$

2.3. On a

$$\forall t \in [0,\pi/2],\ |u_n(t)| \leq \frac{\pi\|f\|_\infty}{n^2\pi^2 - \pi^2/4}$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (il est $O(1/n^2)$). On a donc convergence normale de $\sum(u_n)$ sur $[0,\pi/2]$ (ce qui entraîne la convergence simple sur cet ensemble).

2.4. Comme les u_n sont continues, la convergence normale prouvée indique que $S \in \mathcal{C}^0([0,\pi/2])$.

2.5. Comme $\sum(u_n)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,\pi/2]$, on est dans le cas simple d'interversion. $\sum(\mu_n)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n = \int_0^{\pi/2} S(t)\, dt$$

2.6. Soit $x \geq \pi/2$ et n_x l'unique entier tel que $x \in \left[\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi, \frac{\pi}{2}+n_x\pi\right[$. On a alors, par relation de Chasles,

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k + \int_{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\, dt$$

Quand $x \to +\infty$, $n_x \to +\infty$ et $\sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k \to \int_0^{\pi/2} S(t)\, dt$. Par ailleurs,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\, dt\right| \leq \|f\|_\infty \int_{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n_x\pi} \frac{dt}{t} = |f\|_\infty \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+n_x\pi}{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\, dt = \int_0^{\pi/2} S(t)\, dt$$

2.7. $t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et prologeable par continuité en 0 (limite $f'(0)$ car $\frac{f(u)}{u} = \frac{f(u)-f(0)}{u-0} \to f'(0)$ quand $u \to 0$). Cette fonction est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.

$t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et prologeable par continuité en 0 (par la même valeur $f'(0)$ car $t \sim sin(t)$ au voisinage de 0). Cette fonction est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.

2.8. On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{t} + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{t} + \int_0^{\pi/2} S(t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} g(t)\,dt \quad \text{avec} \quad g(t) = S(t) + \frac{f(\sin(t))}{t} - \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}
\end{aligned}$$

g est continue sur $]0,\pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = S(0) - f'(0) = -f'(0)$.

3.1. Pour $f = Id_{[-1,1]}$ (qui vérifie les bonnes hypothèses) on a (question 1.2)

$$\forall t \in]0,\pi/2],\ S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(t)}{t}$$

et avec la question précédente,

$$J_1 - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\,dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t} + \frac{\sin(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\right)\,dt = 0$$

c'est à dire

$$J_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.2. On utilise cette fois $f(t) = t^3$. On obtient

$$S(t) = \sin^2(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^2(t) - \frac{\sin^3(t)}{t}$$

puis avec 2.8 (comme en 3.1, les termes se simplifient)

$$J_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$

3.3. On utilise plus généralement $f(f) = t^{2p+1}$. On obtient

$$S(t) = \sin^{2p}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^{2p}(t) - \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$$

puis avec 2.8 (comme en 3.1, les termes se simplifient)

$$J_{2p+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}(t)\,dt$$

Une intégration par parties done alors

$$J_{2p+1} = (2p-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{2p-2}(t)\,dt = (2p-1)(J_{2p-1} - J_{2p+1})$$

ou encore

$$J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-1}$$

et on montre enfin grâce à une récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$