CCP PSI Math 2

Partie I

I.A.1.1 S est symétrique réelle donc S est diagonalisable donc s est diagonalisable.
$S^2 = I_4$.
I.A.1.2 S est symétrique donc ${}^tSS = S^2 = I_4$, donc S est une matrice orthogonale or $\mathcal{B}$ est une base orthonormale donc s est un automorphisme orthogonal.
s est diagonalisable donc $\mathrm{Sp}(s) \neq \emptyset$.
Si $\mathrm{Sp}(s) = \{1\}$, alors $\exists P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $S = PI_4P^{-1} = I_4$: absurde, donc $\mathrm{Sp}(s) \neq \{1\}$.
De même $\mathrm{Sp}(s) \neq \{-1\}$, donc $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$.
I.A.1.3 $\mathrm{tr}(s)$=$\mathrm{tr}(S)$=0.
En notant m_i les ordres de multiplicité de E_i pour $i = 1$ ou 2, et D une matrice diagonale semblable à S, on a $\mathrm{tr}(S)$=$\mathrm{tr}(D) = m_1 \times 1 + m_{-1} \times (-1)$, donc $m_1 - m_{-1} = 0$, or $m_1 + m_{-1}$ =ordre $(S) = 4$, donc finalement $m_1 = 2$ et $m_{-1} = 2$.
I.A.2.1 Par un calcul matriciel ou avec la linéarité de s, $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = u_2$, donc $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_1$.
De plus, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc (u_1, u_2) est libre, or dim E_1 =2, donc
(u_1, u_2) est une base de E_1.
Orthonormalisation de Schmidt : on pose $\varepsilon_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4)$,
$\varepsilon_2' = u_2 - (\varepsilon_1|u_2)\varepsilon_1 = e_2 - e_3 + e_4$
et $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4)$.
$(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$ est une base orthonormale de E_1.

I.A.2.2 $\begin{cases} (u_4|u_1) = 0 \\ (u_4|u_2) = 0 \\ (u_4|u_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c + d = 0 \\ a + b + 2d = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ b = -d (d \in \mathbb{R}) \\ c = 0 (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$
Par exemple, pour $d = -1$, $u_4 = e_1 + e_2 - e_4$ convient.
On a donc $u_4 \in E_1^{\perp}$.
Or S est symétrique et $\mathcal{B}$ est orthonormale dons s est symétrique, donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux donc $E_1 \perp E_{-1}$, or $E = E_1 \oplus E_{-1}$: E_{-1} est donc le supplémentaire orthogonal de E_1, donc $E_{-1} = E_1^{\perp}$, donc $u_4 \in E_{-1}$.
On remarque que $(u_3|u_1) = (u_3|u_2) = 0$ donc de même, $u_3 \in E_{-1}$.
On sait que $u_3 \perp u_4$ or ces 2 vecteurs sont non nuls, donc (u_3, u_4) est libre, or dim E_{-1}=2, donc (u_3, u_4) forme une base orthogonale de E_{-1}.

I.A.3.1 $\forall k \in \mathbb{N}, s^k(x) = s^k(y) + s^k(z)$, or on sait que si $s(u) = \lambda u$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, s^k(u) = \lambda^k u$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, s^k(x) = y + (-1)^k z$: $\alpha_k = (-1)^k$.

On a donc $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(y + (-1)^k z) = \dfrac{1}{n}(ny + (\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k)z) = y + \dfrac{1}{n}\dfrac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)}z$
$= y + \dfrac{1}{2n}(1 + (-1)^{n+1})$: $\beta_n = \frac{1}{2n}(1 + (-1)^{n+1}$.

I.A.3.2 $(1 + (-1)^{n+1})_n$ est bornée et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = y = \frac{1}{2}(x + s(x))$ car $\begin{cases} x = y + z \\ s(x) = y - z \end{cases}$
I.B.1.1 $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - ((\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}c)^2 + (\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}d)^2 + (\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}c)^2 + (\frac{1}{4}b + \frac{3}{4}d)^2)$:

$\|u\|^2-\|\ell(u)\|^2=\dfrac{3}{8}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\dfrac{3}{4}(ac+bd)=\dfrac{3}{8}[(a-c)^2+(b-d)^2]$.

donc $\|u\|^2-\|\ell(u)\|^2\geqslant 0$, donc $\|\ell(u)\|^2\leqslant\|u\|^2$, or $\sqrt{.}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\|\ell(u)\|\leqslant\|u\|$.

I.B.1.2

$\|\ell(u)\|=\|u\|\iff\|\ell(u)\|^2=\|u\|^2\iff\dfrac{3}{8}[(a-c)^2+(b-d)^2]=0\iff(a-c)^2=0$ et $(b-d)^2=0$, donc $\|\ell(u)\|=\|u\|\iff a=c$ et $b=d$.

Soit $u\in E$.

$u\in E_1(\ell)\Longrightarrow\ell(u)=u\Longrightarrow\|\ell(u)\|=\|u\|\Longrightarrow a=c$ et $b=d$ ($c\in\mathbb{R}$ et $d\in\mathbb{R}$)

$\Longrightarrow u=c(e_1+e_3)+d(e_2+e_4)\Longrightarrow u\in F=\mathrm{Vect}(e_1+e_3,e_2+e_4)$,

donc $E_1(\ell)\subset F$.

Réciproquement, si on note $v_1=e_1+e_3$ et $v_2=e_2+e_4$, on vérifie que $\ell(v_1)=v_1$ et que $\ell(v_2)=v_2$, donc $(v_1,v_2)\in E_1(\ell)^2$, donc $F\subset E_1(\ell)$, donc finalement $E_1(\ell)=F$, or (v_1,v_2) est libre et par définition de F, ils forment une famille génératrice de F, donc (v_1,v_2) est une base de $F=E_1(\ell)$: $\dim E_1(\ell)=2\geqslant 0$, donc 1 est valeur propre de ℓ.

I.B.2.1 $\dim E_1(l)=2$ et ℓ est diagonalisable (car L est symétrique réelle), donc 1 est racine double de P_ℓ qui est scindé. De plus d°$P_\ell=4$ et il est de la forme $P_\ell(x)=(-1)^4x^4+(-1)^3\mathrm{tr}(\ell)x^3+...+\mathrm{dét}(\ell)$.

On calcule : dét $(\ell)=\frac{1}{4}$ et tr $(\ell)=3$.

D'après son degré, il admet 2 autres racines, notées λ_1 et λ_2, et comme il est unitaire, on a : $P_\ell(x)=(x-1)^2(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, on développe et on identifie :

$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2=3\\ \lambda_1\lambda_2=\frac{1}{4}\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1\\ \lambda_1\lambda_2=\frac{1}{4}\end{cases}\iff\lambda_1$ et λ_2 sont les racines de $x^2-x+\dfrac{1}{4}=(x-\dfrac{1}{2})^2$,

donc $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{2}$: $P_\ell(x)=(x-1)^2(x-\frac{1}{2})^2$.

Autre méthode : on calcule $P_\ell(x)=\mathrm{dét}(L-xI_4)$ en commençant par la transformation $C_1\longleftarrow\displaystyle\sum_{i=1}^{4}C_i$ puis pour i variant de 2 à 4, $L_i\longleftarrow L_i-L_1$, on peut ensuite développer suivant la 1ère colonne, 2 fois de suite et on factorise au maximum.

I.B.2.2 Les valeurs propres de ℓ sont les racines de P_ℓ, donc $\dfrac{1}{2}$ est aussi valeur propre de ℓ.

On a vu au 1. que ℓ est diagonalisable, et comme $\mathrm{Sp}(\ell)=\{1,\dfrac{1}{2}\}$, G_1 et $G_{\frac{1}{2}}$ sont supplémentaires dans E.

I.B.3.1 $\forall k\in\mathbb{N},\ell^k(x)=\ell^k(y)+\ell^k(z)=y+(\dfrac{1}{2})^kz$

I.B.3.2 $L_n(x)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(y+(\dfrac{1}{2})^kz)=y+\dfrac{1}{n}\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=y+\frac{1}{n}(2-(\frac{1}{2})^{n-1})z$.

$|\dfrac{1}{2}|<1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}L_n(x)=y=2s(x)-x$ car $\begin{cases}x=y+z\\ s(x)=y+\frac{1}{2}z\end{cases}$

I.C.1 ${}^tTT=I_4$ donc T est orthogonale.

I.C.2.1 $t(e_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_3-e_4)$ (voir 1ère colonne de T), et $t(\varepsilon_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t(e_3)+t(e_4))=\frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1+e_3+e_4)$.

On remarque que : $t(e_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-\sqrt{2}\varepsilon_1)\in F_1$ et $t(\varepsilon_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1+\sqrt{2}\varepsilon_1)\in F_1$, donc F_1 est stable par t.

(e_1,ε_1) est libre, donc c'est une base de F_1 : $\dim F_1=2$.

I.C.2.2 On sait que F_1 est stable par t, donc $F_1^\perp$ est stable par $t^*=t^{-1}$: F_2 est stable par t^{-1}, soit $t^{-1}(F_2)\subset F_2$. Or t étant un isomorphisme, $\dim t(F_2)=\dim F_2$, donc $t^{-1}(F_2)=F_2$, donc $t(F_2)=F_2$: F_2 est stable par t.

$(e_2|e_1)$=$(e_2|\varepsilon_1)$=0, donc $e_2 \in F_1^{\perp} = F_2$.
$(\varepsilon_2|e_1)$= $(\varepsilon_2|\varepsilon_1)$=0 donc $e_2 \in F_2$.
Il est clair que(e_2, ε_2) est libre et comme E est de dimension finie, dim $F_1^{\perp}$=dim E-dim F_1, donc dim $F_2 = 2$.
En conclusion, $\underline{(e_2, \varepsilon_2) \text{ est une base de } F_2}$.

I.C.3.1 Les vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont orthogonaux 2 à 2 et de norme 1, donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E, or t est orthogonale donc $\underline{T' \text{ est orthogonale}}$.
On connait déja $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$. De plus, $t(e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + \sqrt{2}\varepsilon_2)$, et $t(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_2 + e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_2 + \sqrt{2}\varepsilon_2)$, donc $T' = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

I.C.3.2 $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. De plus, $\cos^2\theta + \sin^2\theta$=1, or $\theta \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, donc $\cos\theta \geqslant 0$ donc $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
donc $T' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Pour i=1 ou 2, on note $b_i = (e_i, \varepsilon_i)$ et t_i l'endomorphisme de F_i induit par t, alors
$\text{Mat}_{b_1}(t_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ donc $\underline{t_1 \text{ est la rotation d'angle -}\theta}$.
De même, $\underline{t_2 \text{ est la rotation d'angle } \theta}$.

I.C.3.3 $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t))^k = T'^k = \begin{pmatrix} A_1^k & (0) \\ (0) & A_1^k \end{pmatrix}$, où A_i =$\text{Mat}_{b_i}(t_i)$, et (0)=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (puissance d'une matrice triangulaire par blocs), or t_1^k est la rotation d'angle $k(-\theta)$, de même pour t_2^k,
donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t^k) = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta & 0 & 0 \\ -\sin k\theta & \cos k\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\theta & -\sin k\theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$

I.C.4 $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\omega})^k$.

Si $e^{i\omega} = 1$, soit $\omega = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, alors $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$, donc $(\zeta_n(\omega))_n$ n'est pas bornée.

Si $\omega \neq 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, alors $\zeta_n(\omega) = \dfrac{1-(e^{i\omega})^n}{1-e^{i\omega}} = \dfrac{1-e^{in\omega}}{1-e^{i\omega}}$, donc $|\zeta_n(\omega)| \leqslant \dfrac{|1| + |e^{in\omega}|}{1-e^{i\omega}} = \dfrac{2}{1-e^{i\omega}}$: $(\zeta_n(\omega))_n$ est bornée.
Finalement, $\underline{(\zeta_n(\omega))_n \text{ est bornée} \Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{Z}, \omega \neq 2p\pi}$.
I.C.5.1 $\underline{F_1 \text{ est stable}}$ par t donc par t^kpour $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc $\underline{\text{par } T_n}$.

I.C.5.2 On reprend les notations du C.3.2, et on note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, alors $t^k(y)$ a pour matrice colonne de coordonnées dans b_1 : $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = A_1^k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donc $V_k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$

$T_n(y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k(y)$ a donc pour matrice colonne de coordonnées dans b_1 :
$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V_k) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donc $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k$ et si on note

$u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$ et $v_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin k\theta$, alors on a $U_n=\begin{pmatrix} u_n & v_n \\ -v_n & u_n \end{pmatrix}$

$\theta=\text{Arcsin }(\sqrt{\frac{2}{3}})\neq 2p\pi$ donc $e^{\frac{in\theta}{2}}$ $\zeta_n(\theta)=\dfrac{e^{i0}-e^{in\theta}}{e^{i0}-e^{i\theta}}=\dfrac{e^{\frac{in\theta}{2}}(e^{-\frac{in\theta}{2}}-e^{\frac{in\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}})}=(e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}})\dfrac{-2isin\frac{n\theta}{2}}{-2isin\frac{\theta}{2}}$, donc $\underline{u_n=\dfrac{sin\frac{n\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}\cos\dfrac{(n-1)\theta}{2}\text{ et } v_n=\dfrac{sin\frac{n\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}\sin\dfrac{(n-1)\theta}{2}}$.

Mais il suffit peut-être de répondre $u_n=$Re$(\zeta_n(\theta))$ et $v_n=$Im$(\zeta_n(\theta))$

I.C.5.2 $(\zeta_n(\omega))_n$ étant bornée, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ aussi donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$, donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(y)=0}$.

I.C.5.3 On a le même résultat pour $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(z)$ (le signe devant v_n ne change pas la limite, donc , comme $T_n(x)=T_n(y)+T_n(z)$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)=0}$.

Partie II

II.A.1. Soient $x\in\ker\,(\ell-id)$ et $y\in\text{Im}\,(\ell-id)$, alors $\ell(x)=x$, et $\exists\alpha\in E$ tel que $y=(\ell-id)(\alpha)$, donc $(x|y)=(x|\ell(\alpha)-\alpha)=(x|l(\alpha))-(x|\alpha)=(\ell(x)|\ell(\alpha))-(x|\alpha)=0$ car $\ell\in O(E)$ donc ℓ conserve le produit scalaire. On a donc toujours $x\perp y$: $\underline{\ker\,(\ell-id)\text{ et Im }(\ell-id)\text{ sont donc orthogonaux}}$.
On en déduit que $\ker\,(\ell-id)\subset\text{Im }(\ell-id)^{\perp}$.
De plus, E étant un espace euclidien, il est de dimension finie, donc en notant $F=$Im $(\ell-id)$, on a $E=F\oplus F^{\perp}$, donc dim $E=$ dim F +dim $F^{\perp}$.
D'autre part, d'après le théorème du rang, dim $E=$ dim F +dim ker $(\ell-id)$.
On obtient donc dim ker $(\ell-id)$=dim $F^{\perp}$, et d'après l'inclusion précédente, ker $(\ell-id)$=$F^{\perp}$, or $F^{\perp}$ et F sont supplémentaires dans E, donc $\underline{\ker\,(\ell-id)\text{ et Im }(\ell-id)\text{ sont supplémentaires dans }E}$.

II.A.2 $y\in\ker\,(\ell-id)$, donc $\ell(y)=y$, donc $\forall k\in\mathbb{N},\ell^k(y)=y$, donc
$\ell^k(x)=y+\ell^k(\ell(z)-z)=y+\ell^{k+1}(z)-\ell^k(z)$.
On a donc $L_n(x)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(y+\ell^{k+1}(z)-\ell^k(z))=y+\dfrac{1}{n}(\ell^n(z)-\ell^0(z))$, donc $\underline{L_n(x)=y+\dfrac{1}{n}(\ell^n(z)-z)}$

II.A.3 On a donc : $\|L_n(x)-y\|=\|\dfrac{1}{n}(\ell^n(z)-z)\|\leqslant\dfrac{1}{n}(\|\ell^n(z)\|+\|z\|)$ d'après l'inégalité triangulaire.
De plus, l conserve la norme donc $\|\ell^n(z)\|=\|z\|$, donc $0\leqslant\|L_n(x)-y\|\leqslant\dfrac{1}{n}2\|z\|$ et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|L_n(x)-y\|=0$, donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}L_n(x)=y}$.

II.B.1 Soit $f\in B(E)$, et soit $x\in E$, alors
$\|f^*(x)\|^2=(f^*(x)|f^*(x))=(x,f(f^*(x)))\leqslant\|x\|\|f(f^*(x))\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Or $f\in B(E)$ donc $\forall y\in E$, $\|f(y)\|\leqslant\|y\|$ donc $\|f^*(x)\|^2\leqslant\|x\|\|f^*(x)\|$ (avec $y=f^*(x)$).
$*$ Si $\|f^*(x)\|\neq0$, alors $\|f^*(x)\|>0$, donc en multipliant par $\dfrac{1}{\|f^*(x)\|}$, on obtient $\|f^*(x)\|\leqslant\|x\|$.
$*$ Si $\|f^*(x)\|=0$, alors, comme $\|x\|\geqslant0$, on a aussi $\|f^*(x)\|\leqslant\|x\|$.
Dans tous les cas : $\|f^*(x)\|\leqslant\|x\|$: $\underline{f^*\in B(E)}$.

II.B.2 Soit $x\in E$ tel que $f(x)=x$.
$\|f^*(x)-x\|^2=\|f^*(x)\|^2-2(f^*(x)|x)+\|x\|^2\leqslant\|x\|^2-2(f^*(x)|x)+\|x\|^2$ car $f^*\in B(E)$.
Or $(f^*(x)|x)=(x|f(x))=(x|x)=\|x\|^2$, donc l'inégalité précédente devient : $\underline{\|f^*(x)-x\|^2\leqslant0}$.
Or $\|f^*(x)-x\|^2\geqslant0$ donc $\|f^*(x)-x\|^2=0$ donc $f^*(x)=x$: on vient donc de montrer que
[si $x\in\ker(f-id)$, alors $x\in\ker(f^*-id)$], donc $\ker(f-id)\subset\ker(f^*-id)$.

De plus, dim $\ker(f^*-id)$=dim $\ker(f^*-id^*)$=$\ker(f-id)^*$=dim$E$-rg$(f-id)^*$ d'après le théorème du rang, donc dim $\ker(f^*-id)$ =dim$E$-rg$(f-id)$ =dim $\ker(f-id)$, donc avec l'inclusion précédente, $\underline{\ker(f-id)=\ker(f^*-id)}$.

II.B.3 Pour $\varphi=(f-id)$, on obtient : $\ker(f^*-id)=(\text{Im }(f-id))^\perp$, or en notant F =Im $(f-id)$, $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E (:de dimension finie), donc $\ker(f^*-id)$ et Im $(f-id)$ sont supplémentaires dans E et d'après II.B.2, $\ker(f-id)$ et Im $(f-id)$ sont supplémentaires dans E.

II.C.1 (Remarque : on n'a plus les résultats du B car il manque l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)
Soit $x\in\ker(\ell-id)\cap$ Im $(\ell-id)(\subset\text{Im }(f-id))$, et soit $y\in E$ tel que $x=\ell(y)-y$, alors
$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ell^k(x)=l^{k+1}(y)-\ell^k(y)$: on somme d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}l^k(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\ell^{k+1}(y)-\ell^k(y)=\ell^n(y)-\ell^0(y)=$ $\ell^n(y)-y$.
Or on sait aussi que $x\in\ker(\ell-id)$, donc $\ell(x)=x$, donc $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ell^k(x)=x$ et l'égalité précédente devient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x=\ell^n(y)-y$, donc $\underline{\ell^n(y)=nx+y}$.
On a donc : $\|nx\|=\|\ell^n(y)-y\|\leqslant\|\ell^n(y)\|+\|y\|$, or $\|\ell^n(y)\|=\|y\|$, et en divisant par $n>0$, on obtient : $0\leqslant\|x\|\leqslant\frac{1}{n}2\|y\|$donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x\|=0$, or $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x\|=\|x\|$ donc $\|x\|=0$ donc x=0 : on vient de montrer que $\ker(\ell-id)\cap\text{Im}(\ell-id)=\{0\}$, et à l'aide du théorème du rang appliqué à $\ell-id$, on obtient : $\ker(\ell-id)$ et Im$(\ell-id)$ sont supplémentaires dans E.

II.C.2 On a donc, comme au II.A, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}L_n(x)=y}$.

Partie III

III.1 $\sigma_e(e)=e-2\frac{\|e\|^2}{\|e\|^2}e$: $\underline{\sigma_e(e)=-e}$.
Soit x orthogonal à e, alors $\sigma_e(x)=x-0$: $\underline{\sigma_e(x)=x}$.
0n note $u_1=\frac{e}{\|e\|}$, et $(u_2,u_3,...,u_n)$ une base ortonormée de Vect$(e)^\perp$, alors $(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$ est une base ortonormée de E et dans cette base, la matrice de σ_e est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont -1,et 1 répétés $n-1$ fois : cette matrice étant clairement ortogonale, σ_e est un automorphisme orthogonal de E.

III.2.1 Par définition, $e=(\ell-id)(u)$, donc $e\in\text{Im}(\ell-id)$, or d'après II.A.1), W et Im$(\ell-id)$ sont orthogonaux, donc $e\in W^\perp$: e est orthogonal à W.

III.2.2 $\sigma_e(\ell(u)-u)=\sigma_e(e)=-e$ d'après III.1), donc $\underline{\sigma_e(\ell(u)-u)=u-\ell(u)}$.
On remarque que $(\ell(u)-u,\ell(u)+u)=\|\ell(u)\|^2-\|u\|^2=\|u\|^2-\|u\|^2=0$, car $\ell\in O(E)$, donc $\ell(u)+u\perp e$, donc d'après III.2.1), $\underline{\sigma_e(\ell(u)+u)=\ell(u)+u}$.
σ_e étant linéaire, on obtient : $\left\{\begin{array}{l}\sigma_e(\ell(u))-\sigma_e(u)=u-\ell(u)\\ \sigma_e(\ell(u))+\sigma_e(u))=\ell(u)+u\end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{l}\sigma_e(\ell(u))=u\\ \sigma_e(u)=\ell(u)\end{array}\right.$

III.2.3 Soit $x\in\text{Vect}(u,W)$, alors $\exists(\alpha,w)\in\mathbb{R}\times W/x=\alpha u+w$,
or $(\sigma_e\circ\ell-id)(u)=\sigma_e(\ell(u))-u=0$ d'après III.2.2), et
comme $w\in W$, on a : $\ell(w)=w$, donc $(\sigma_e\circ\ell-id)(w)=\sigma_e(w)-w$, or $w\in W$ et $e\in$Im$(\ell-id)$, donc d'après II.A.1), $w\perp e$, et d'après III.1), $\sigma_e(w)=w$, donc finalement $(\sigma_e\circ\ell-id)(w)=0$, donc par linéarité de σ_e, $(\sigma_e\circ\ell-id)(x)=0$, donc $x\in\ker\,(\sigma_e\circ\ell-id)$.
On a montré que Vect$(u,W)\subset$ker $(\sigma_e\circ\ell-id)$.

Réciproquement soit $x \in$ker $(\sigma_e \circ \ell - id)$, alors $\sigma_e(\ell(x)) = x$.
$*$ Analyse : on suppose que $\exists(\alpha, w) \in \mathbb{R} \times W / x = \alpha u + w$, alors $\ell(x) = \alpha\ell(u) + w$, donc $\ell(x) - x = \alpha e$.
Une fois que α sera déterminé, on pourra poser $w = x - \alpha u$.
$*$ Synthèse : on pose $y = \ell(x) - x$, alors $\sigma_e(y) = x - \sigma_e(x)$.
Or σ_e étant une réflexion (donc une symétrie), et comme $\sigma_e(\ell(x)) = x$, on obtient en appliquant σ_e : $\sigma_e(x) = \ell(x)$, donc finalement $\sigma_e(y) = x - \ell(x) = -y : y \in E_{-1}(\sigma_e)$, or σ_e étant une réflexion, son sous-espace propre associé à -1 est de dimension 1 : c'est Vect(e), donc $y \in$ Vect(e), donc $\exists \alpha \mathbb{R} / y = \alpha e$, donc $\ell(x) - x = \alpha e$.
On pose $w = x - \alpha u$, alors $\ell(w) = \ell(x) - \alpha\ell(u) = (x + \alpha e) - \alpha\ell(u) = x + \alpha(\ell(u) - u) - \alpha\ell(u)$, donc $\ell(w) = w : w \in W$.
Or $w = x - \alpha u$, donc $x = w + \alpha u \in$Vect(u, W).
On a montré que ker $(\sigma_e \circ \ell - id) \subset$Vect$(u, W)$.

Finalement : $\underline{\text{Vect}(u, W) = \ker\ (\sigma_e \circ \ell - id)}$.

III.2.4 On remarque que dim Vect$(u, W) = 1+$dim$W$ (: en fait Vect(u, W)=Vect$u \oplus W$)
Si ker $(\sigma_e \circ \ell - id) \neq E$ (c'est à dire si 1+dim$W < n$), on recommence le 3) avec $\sigma_e \circ \ell$, qui est bien un automorphisme orthogonal car σ_e et ℓ le sont.
Si dim $W = k$, on pourra faire cette étape $n - k$ fois, et en notant $u_1 = u$, le vecteur trouvé à la question III.2.3) et $e_1 = \ell(u_1) - u_1$, on obtient par récurrence :
Vect$(u_{n-k}, ...u_2, u_1, W)$ =ker$(\sigma_{e_{n-k}} \circ ... \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - id)$ avec dim Vect$(u_{n-k}, ...u_2, u_1, W) = n$, donc Vect$(u_{n-k}, ...u_2, u_1, W) = E$, donc, en notant $g = \sigma_{e_{n-k}} \circ ... \circ \sigma_{e_1} \circ \ell$, on a : ker$(g - id) = E$, donc $g - id = 0$, donc $g = id$, et en composant à gauche par les symétries dans l'ordre rencontré, on obtient $g = \sigma_{e_1} \circ \sigma_{e_2} \circ ... \circ \sigma_{e_{n-k}}$:
$\underline{\ell \text{ peut se décomposer en produit de } n - k \text{ réflexions}}$.
Pour les courageux, l'hypothèse de récurrence est, pour $p \in [\![1, n - k]\!]$,
H_p : "$\exists(u_1, u_2, ..., u_p) \in E^p /$Vect$(u_p, ...u_2, u_1, W)$ =ker$(\sigma_{e_p} \circ ... \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - id)$, où $e_i = \ell(u_i) - u_i$"