Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Etant donné un entier naturel non nul n, on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Etant donné une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire, telle que $I_n = (a_{i,j})$ avec :

Pour tout i, $a_{i,i} = 1$ et pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.

On note J_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Objectifs :

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété $(\mathscr{P})$.
Dans la partie I, on fait établir des résultats sur une matrice particulière vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$.

La partie II conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$, à caractériser ces matrices à l'aide de matrices semblables.

Dans la partie III, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$.

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.

PARTIE I

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R}).$$

I.1. Calculer la matrice M^2.

I.2. Exprimer la matrice $M^2 + M$ en fonction des matrices J_5 et I_5.

I.3. Exprimer la matrice J_5^2 en fonction de la matrice J_5.

I.4. Déduire des questions précédentes un polynôme annulateur de M.

I.5. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice M ?

I.6. Montrer que M possède une valeur propre <u>entière</u> (et une seule) ; déterminer cette valeur propre entière ainsi que le sous-espace propre associé.

PARTIE II

Dans cette partie n et δ sont des nombres entiers tels que $2 \leq \delta \leq n-1$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

(1) M est symétrique

(2) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $m_{i,i} = 0$

(3) Chaque ligne de M comporte δ coefficients égaux à 1 et $n-\delta$ coefficients égaux à 0.

(4) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \text{ x } [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{i,j} = 0$, si et seulement si, il existe un entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. L'entier k est alors unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété $(\mathscr{P})$:
si $m_{i,j} = 1$, alors pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$ on a le produit $m_{i,k}m_{j,k} = 0$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.

II.1. Expression de M^2. On note $M^2 = (a_{i,j})$.

II.1.1. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, calculer les coefficients $a_{i,i.}$

II.1.2. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \text{ x } [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, déterminer le coefficient $a_{i,j}$ selon la valeur de $m_{i,j}$.

II.1.3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$ où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement φ) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K_n.

II.2. Relation entre n et δ.

II.2.1. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$, l'image de l'application linéaire φ.

II.2.2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \delta\, id$.

En calculant $(f \circ f)(u)$, montrer que u est colinéaire à v.

II.2.3. Montrer que δ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.

II.2.4. Déduire des questions précédentes l'égalité $n = \delta^2 + 1$.

II.3. Valeurs propres de f.

Dans la suite de cette question **II.3**, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \delta$ et $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

II.3.1. Justifier l'affirmation : il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

II.3.2. Justifier l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Que vaut $\varphi(u)$?

II.3.3. Montrer que λ est racine de l'équation (E): $x^2 + x + 1 - \delta = 0$.

II.3.4. On note a et b les deux racines de l'équation (E). On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f, par exemple a. En utilisant la trace de l'endomorphisme f, exprimer a en fonction de δ. En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f. Dans la suite, on suppose $a > b$.

II.4. Relations portant sur r, s, a, b et δ.

On note r la dimension du noyau de $f - a\,id$ et s la dimension du noyau de $f - b\,id$.

II.4.1. Exprimer $(a-b)^2$ en fonction de δ.

II.4.2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de δ.

II.4.3. En déduire $(r-s)(a-b)$ en fonction de δ.

II.4.4. Pour quelle valeur de δ a-t-on $r = s$? Que valent alors r et s ?

Dans la suite, on caractérise la matrice M par une matrice diagonale semblable à M.

II.5. Premier cas. On suppose que $a - b \notin \mathbb{Q}$.

II.5.1. Montrer que $r = s$. En déduire δ et n.

II.5.2. Déterminer a et b et donner une matrice diagonale semblable à M.

II.6. Deuxième cas. On suppose que $a - b \in \mathbb{Q}$.

II.6.1. On écrit $a - b = \dfrac{m}{q}$ avec m et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que tout nombre premier qui divise q divise m. En déduire que $a - b \in \mathbb{N}$.

II.6.2. Montrer que $a - b$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant $a - b = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer δ en fonction de p. En déduire a et b en fonction de p.

II.6.3. On note $c = a - b$. Montrer que c divise $(c^2+3)(c^2-5)$. En déduire que $c \in \{3,5,15\}$.

II.6.4. Pour les différentes valeurs de c, donner le tableau des valeurs de δ, n, a, b, r et s.

PARTIE III

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^5$ rapporté à la base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.
On note $(u|w)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et w de $\mathbb{R}^5$.

On considère tous les vecteurs u_i obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de $\mathscr{B}$:
$u_i = e_\alpha + e_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$.

III.1. Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs u_i.

On indexe les vecteurs u_i de façon arbitraire : u_i, $i \in [\![1,10]\!]$.

III.2. Soit ψ un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ qui réalise une bijection de la base $\mathscr{B}$ sur elle-même. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1,10]\!]$ x $[\![1,10]\!]$, on a $(u_i|u_j) = \left(\psi(u_i)|\psi(u_j)\right)$.

III.3. Calcul des produits scalaires $(u_i|u_j)$.

III.3.1. Pour $i \in [\![1,10]\!]$, calculer $(u_i|u_i)$.

III.3.2. On suppose que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.3.3. On suppose que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\gamma + e_\varepsilon$ avec les quatre indices α, β, γ, ε tous différents. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.4. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (u_i|u_j)$.

III.4.1. Écrire une combinaison linéaire M de A, I_{10} et J_{10} susceptible de vérifier la propriété $(\mathscr{P})$ définie dans la partie II.

III.4.2. Justifier que cette matrice M vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.

Fin de l'énoncé.