CCP 2006 -PSI
première épreuve : corrigé

Partie I.

1.1. D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

1.2. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = 1$.

1.3. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ sont grossièrement divergentes.

2.1. La formule du binôme indique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

2.2.1. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Pour $|z| < 1$ ce terme admet une limite. $\sum(a_n)$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

2.2.2. On a $\left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1$ et $\sum(a_n^*)$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme

$$\sum_{n\geq 0} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

2.3.1. La série $\sum(a_n)$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

2.3.2. Si $z = -2$ alors $a_n^* = (-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

2.3.3. (a_n^*) est une suite géométrique de raion $r = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = \cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\theta \in]0,\pi[$, $|r| \in]0,1[$ et $\sum(a_n^*)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} = 1 + i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Partie II.

1.1.1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

1.1.2. Par croissance comparées, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$$

1.2. q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une suite finie de suites de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k \geq q,\ |a_k| \leq \varepsilon/2$. La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |S_q(n,a)| \leq \varepsilon/2$. On a alors

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| = \left| S_q(n,a) + \frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| \leq \varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

1.4. On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_k - l)$$

et on se ramène au cas précédent ($a_n - l \to 0$). Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$$

1.5. Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2.1. Un calcul au brouillon (non reporté) donne

$$U_0 = S_0,\ U_1 = 2S_0 + S_1,\ U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0,\ U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

2.2.1. On peut donc supposer que

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$$

2.2.2. La formule précédente est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie jusqu'au rang $n-1$. On remarque que

$$U_n = 2^n T_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n$$

Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) S_k + S_n$$

La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.

2.3. On suppose que $\sum(a_n)$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \to S$ quand $n \to +\infty$. Avec la question précédente, on a

$$U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1} - S_1$$

Comme $S_{n+1} \to S$, la question $II.1$ indique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1} = S$$

ce qui donne $\frac{U_{n-1}+S_1}{2^n} \to S$ ou encore $T_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}} \to 2S$. La série $\sum(a_n^*)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

2.4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum(a_n)$ diverge alors que $\sum(a_n^*)$ converge. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ n'ont donc pas toujours même nature.

Partie III.

1.1. Pour tout réel x la suite $(x^n/(n+1)!)$ est de limite nulle et donc bornée. La série entière $\sum(x^n/(n+1)!)$ est donc de rayon de convergence infini et f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est même, comme somme de série entière, de classe $\mathcal{C}\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.2. On a

$$\forall x,\ x(f) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1$$

1.3. On en déduit que

$$\forall x \neq 0,\ e^{-x} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$$

En 0, la fonction prend la valeur 1 ($f(0) = 1$).

2.1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{\sigma_n x^n}{n!}\right| \leq \frac{n|x|^n}{n!} \to n \to +\infty 0$$

La série entière : $sum \frac{\sigma_n}{n!} x^n$ est donc de rayon de convergence infini. g est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.2. On peut dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. Ainsi (on tient compte de $\sigma_0 = 0$)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\sigma_{n+1}}{n!} x^n - \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n+1)!} = f(x)$$

2.3. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = f(x)e^{-x}$$

En primitivant (avec les primitives nulles en 0) on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x \int_0^x f(t)e^{-t}\, dt$$

3.1. F est une primitive de $x \mapsto e^{-x}f(x)$. Or, d'après $III.1$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}$$

On peut primitiver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. Comme $F(0) = 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n.n!}x^{n}$$

3.2. On a $g(x) = e^x F(x)$. Dérivons cette égalité n fois (avec la formule de Leibnitz) et prenons la valeur en 0. On obtient

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)}(0)$$

Or, si h est la somme de la série entière $\sum(b_k x^k)$ alors $b_k = k!h^{(k)}(0)$. Ainsi, l'égalité précédente s'écrit

$$\forall n \geq 1,\ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = n!\gamma_n$$

4.1.1. On a

$$w_k = -\ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{2(k+1)^2}$$

et c'est donc le terme général d'une série absolument convergente.

4.1.2. Soit $v_n = \sigma_n - \ln(n)$; on a $v_n - v_{n+1} = w_n$. Or, la série $\sum(v_n - v_{n+1})$ et la suite (v_n) ont même nature et donc (v_n) est une suite convergente.

4.2. En regraoupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a

$$\tau_{2n} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

$$\sigma_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

En faisant la différence, on obtient

$$\tau_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n$$

4.3. Sotons l la limite de $(\sigma_n - \ln(n)) = (v_n)$. On a

$$v_{2n} - v_n = \sigma_{2n} - \sigma_n - \ln(2) = \tau_{2n} - \ln(2)$$

Cette quantité étant de limite $l - l = 0$, on a donc $\tau_{2n} \to \ln(2)$. Par ailleurs $\tau 2n + 1 - \tau_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et donc $\tau_{2n+1} \to \ln(2)$. Finalement, la suite τ est convergente de limite $\ln(2)$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

5.1. $(\sigma_n - \ln(n))$ admettant une limite finie, on a $\sigma_n \sim \ln(n)$. Ainsi, $(x^n\sigma_n)$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$. Le rayon de convergence R est donc égal à 1.

5.2. Comme $\sigma_n \to +\infty$, $\sum(\sigma_n)$ diverge et $\Delta = [-1, 1[$. On peut dériver terme à terme la série entière pour obtenir

$$\forall x \in [0, 1[,\ \phi'(x) = \sum_{n\geq 1} n\sigma_n x^{n-1} \geq 0$$

et ϕ est donc croissante sur $[0, 1[$.

5.3. La relation $\gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}$ peut s'écrire

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Si on pose $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k \geq 1$ et $a_0 = 0$, on a donc

$$\frac{\sigma_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_n^*$$

La partie II indique alors que $\sum(a_n^*)$ est convergente de somme égale à deux fois celle de $\sum(a_n)$. On a ainsi

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2\ln(2)$$

5.4. Soit $u_k = \frac{1}{k}$ si $k \geq 1$ et $u_0 = 1$. Soit w la suite constante égale à 1. On a

$$\forall n \geq 0,\ \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k w_{n-k} = (u * w)_n$$

où $u * w$ désigne le produit de Cauchy de u par w. Le cours indique alors que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \phi(x) = \sum_{k\geq 0} u_k x^k \sum_{k\geq 0} x^k = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve $\phi(1/2) = 2\ln(2)$.