Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Notations et objectifs

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $|\lambda|$ le module de λ.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices à deux lignes et à deux colonnes, à coefficients complexes.

$M = (m_{i,j})$ étant une matrice à coefficients complexes, on note $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de M. La matrice transposée de M est notée ${}^tM$.

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M et $\operatorname{tr}(M)$ la trace de M. On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le problème porte sur l'étude de sous-ensembles de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et conduit à définir, par des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, des rotations d'un espace euclidien de dimension 3.

Dans la première partie, on définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$.

Dans la deuxième et la troisième partie, on étudie des sous-ensembles de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Dans la quatrième partie, on définit une structure euclidienne sur un sous-ensemble de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on étudie des automorphismes de cet espace euclidien.

Dans tout le problème, des questions de calcul peuvent être traitées indépendamment des autres questions.

PARTIE I

On note $\mathbb{C}^2$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des couples de nombres complexes. Les deux vecteurs $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{C}^2$ forment une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$, appelée base canonique.

Étant donné deux vecteurs $x = (a,b)$, $y = (c,d)$ de $\mathbb{C}^2$, de matrices $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique, **on définit le produit scalaire** $\boldsymbol{(x \mid y) = \bar{a}c + \bar{b}d = {}^t\bar{X}Y}$ **; la norme est définie par** $\boldsymbol{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}}$ **.**

$\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel préhilbertien complexe pour ce produit scalaire et $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^2$.

I.1. Soient $x = (a,b)$, $y = (c,d)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ et λ, μ deux scalaires complexes. Exprimer les produits scalaires $(y \mid x)$, $(\lambda x \mid y)$, $(x \mid \mu y)$ en fonction du produit scalaire $(x \mid y)$.

I.2. Soient $x = (a, 1+3i)$, $y = (-1+5i, 3-2i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$.

I.2.1. À quelle condition sur le nombre complexe a, les vecteurs x et y forment-ils une base de $\mathbb{C}^2$?

I.2.2. À quelle condition cette base est-elle orthogonale ? Dans ce cas, calculer la norme de x.

I.3. Soit $T = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

I.3.1. Déterminer les valeurs propres (complexes) et les sous-espaces propres de T.

I.3.2. En déduire qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres de T, que l'on explicitera.

I.4. Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $x = (a,b)$, $y = (c,d)$ les vecteurs colonnes de U.

Exprimer le produit matriciel ${}^t\overline{U}U$ en fonction de $(x \mid y)$, $\|x\|$ et $\|y\|$.

PARTIE II

On note $\mathcal{U} = \left\{ U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \; ; \; {}^t\overline{U}U = I_2 \right\}$.

II.1. Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $x = (a,b)$, $y = (c,d)$. À quelle condition sur les vecteurs colonnes x et y de U a-t-on $U \in \mathcal{U}$?

II.2. Soit $U \in \mathcal{U}$. Calculer $|\det(U)|$, le module de $\det(U)$.

II.3. Soit $U \in \mathcal{U}$.

II.3.1. Montrer que U est inversible et que U^{-1} appartient à $\mathcal{U}$.

II.3.2. Montrer que $\overline{U}$ appartient à $\mathcal{U}$ et que ${}^tU$ appartient à $\mathcal{U}$.

II.3.3. Soit $V \in \mathcal{U}$. Montrer que le produit UV appartient à $\mathcal{U}$.

II.4. Soit U un élément de $\mathcal{U}$ et soit λ une valeur propre complexe de U. Déterminer $|\lambda|$.

PARTIE III

On note $\mathcal{SU} = \{U \in \mathcal{U} \quad ; \quad \det(U) = 1\}$.

Pour θ élément de $\mathbb{R}$, on définit la matrice $D_\theta \in \mathcal{SU}$ par : $D_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

III.1. Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

III.1.1. Donner les quatre relations portant sur les scalaires *a, b, c, d,* qui caractérisent l'appartenance de U à $\mathcal{SU}$.

III.1.2. On suppose que U appartient à $\mathcal{SU}$. Montrer que $c = -\overline{b}$ et $d = \overline{a}$.

III.1.3. En déduire que U appartient à $\mathcal{SU}$ si et seulement si $U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

III.2. Soit $U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ une matrice de $\mathcal{SU}$.

III.2.1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \det(U - \lambda I_2)$ de U. En déduire qu'il existe un réel θ tel que les valeurs propres de U sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Etant donné une matrice $U \in \mathcal{SU}$, on admet que U est semblable à une matrice diagonale D_θ avec une matrice de passage $P \in \mathcal{SU}$, c'est à dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{SU}$ tels que $U = PD_\theta P^{-1}$. La démonstration de ce résultat fera l'objet de la question **IV.7**.

III.2.2. Vérifier que la matrice T définie à la question **I.3** appartient à $\mathcal{SU}$. Déterminer un réel θ et une matrice P appartenant à $\mathcal{SU}$, tels que $T = PD_\theta P^{-1}$.

PARTIE IV

Rappel : E étant un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à la base orthonormale directe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, θ étant un réel, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice, relativement à cette base, de la rotation de E d'axe dirigé par le vecteur ε_1 et dont une mesure de l'angle est le réel θ.

On note $\mathcal{V} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ ; \ A = {}^t\overline{A} \ et \ \operatorname{tr}(A) = 0 \right\}$.

IV.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

IV.1.1. Montrer que A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec *a, r, s* réels. En déduire que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel dont une base est formée par les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

IV.1.2. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par : $(A, B) \mapsto \, < A, B > = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB)$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{V}$. En notant $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$ la norme de A, exprimer $\|A\|^2$ en fonction de $\det(A)$.

IV.1.3. Pour j et k appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, calculer les produits scalaires $< E_j, E_k >$. Que peut-on en déduire ?

Dans la suite, on considère $\mathcal{V}$ comme un espace euclidien, pour le produit scalaire défini ci-dessus.

IV.2. Soit $P \in \mathcal{SU}$. On note l_P l'application définie sur $\mathcal{V}$ par : pour tout $A \in \mathcal{V}$, $l_P(A) = PAP^{-1}$.

IV.2.1. Montrer que l_P est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $\mathcal{V}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{V}$ qui conserve la norme).

IV.2.2. Soient P et Q dans $\mathcal{SU}$. Montrer que le produit PQ appartient à $\mathcal{SU}$ et montrer que la composée $l_P \circ l_Q$ vérifie $l_P \circ l_Q = l_{PQ}$.

Dans la suite, pour $U \in \mathcal{SU}$, on étudie les automorphismes l_U de $\mathcal{V}$.

IV.3. Caractérisation de l_{D_θ}.

IV.3.1. Pour $j = 1,2,3$, exprimer $l_{D_\theta}(E_j)$ dans la base (E_1, E_2, E_3).

IV.3.2. En déduire que l_{D_θ} est une rotation de l'espace euclidien $\mathcal{V}$, dont on donnera un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle.

IV.4. Soit $U \in \mathcal{SU}$. En utilisant le résultat admis dans **III.2.**, déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathcal{V}$, relativement à laquelle la matrice de l_U est une matrice de rotation. Préciser un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

IV.5. Soit $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{SU}$. En notant $a = p + iq$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $U = pI_2 + iH$ avec $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

IV.5.1. Montrer que H appartient à $\mathcal{V}$.

IV.5.2. Déterminer $l_U(H)$.

IV.5.3. En notant $b = r + is$, $(r,s) \in \mathbb{R}^2$, déterminer par ses composantes relativement à la base (E_1, E_2, E_3), un vecteur de l'axe de la rotation l_U.

IV.6. On considère la rotation l_T de $\mathcal{V}$, définie par la matrice de T de la question **I.3** ; donner un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

IV.7. Soit $U \in \mathcal{SU}$. Démonstration du résultat admis dans **III.2.**

IV.7.1 On suppose que U a une valeur propre double ; quelles sont les matrices U possibles ?

IV.7.2 Dans le cas où U a deux valeurs propres distinctes, montrer que les sous espaces propres correspondants sont orthogonaux dans $\mathbb{C}^2$. En déduire le résultat admis dans **III.2**.

Fin de l'énoncé.