Partie I.

I.1. On obtient directement, à partir de la formule du produit scalaire,

$$(y|x) = \overline{(x|y)}, \ (\lambda x|y) = \overline{\lambda}(x|y), \ (x|\mu y) = \mu(x|y)$$

Remarque : on a symétrie hermitienne, linéarité à droite et semi-linéarité à gauche.

I.2.1. Une famille de deux vecteurs est une base de $\mathbb{C}^2$ si et seulement si son déterminant dans une base est non nul. La famille (x, y) est donc une base de $\mathbb{C}^2$ si et seulement si

$$a \neq -4 - 2i$$

I.2.2. La famille est orthogonale si le produit scalaire est nul (dans ce cas, c'est une base car les vecteurs qui la composent sont non nul). Ceci a lieu si

$$(y|x) = a(-1 - 5i) + (1 + 3i)(3 + 2i) = 0$$

c'est à dire si

$$a = 2 + i$$

Dans ce cas, on

$$\|x\| = \sqrt{15}$$

I.3.1. Le polynôme caractéristique de T est

$$P_T = det(I_2 - XT) = X^2 + 1$$

i et $-i$ sont donc les deux valeurs propres complexes. Les sous-espaces propres étant en somme directe, ils seront tout deux de dimension 1 (la somme étant incluse dans un espace de dimension 2). Chacun de sous-espaces est donc caractérisé par un vecteur. Le calcul donne

$$E_i(T) = Ker(T - iI_2) = Vect((-i\sqrt{3}, 1)), \ E_{-i}(T) = Vect((-1/\sqrt{3}, -i))$$

I.3.2. Les vecteurs $(-i\sqrt{3}, 1)$ et $(-1/\sqrt{3}, -i)$ sont orthogonaux (produit scalaire nul). On obtient une base orthonormale en les divisant par leur norme. Cette base est

$$\Big((-i\sqrt{3}/2, 1/2), (-1/2, -i\sqrt{3}/2)\Big)$$

I.4. Le calcul donne immédiatement

$$^t\overline{U}U = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & (x|y) \\ \overline{(x|y)} & \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

Partie II.

II.1. Le calcul de $I.4$ donne immédiatement que $U \in \mathcal{U}$ si et seulement si la famille (x, y) des vecteurs colonnes de U est une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$.

II.2. En passant au déterminant dans la relation $^t\overline{U}U = I_2$, on obtient

$$|det(U)|^2 = \overline{det(U)}det(U) = det(^t\overline{U})det(U) = det(I_2) = 1$$

On a donc $|det(U)| = 1$.

II.3.

II.3.1. U est inversible car son déterminant est non nul. Les formules de Cramer donnent aussi (déterminant égal à 1)

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Les colonnes de cette matrice formant une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$, $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

II.3.2. De la même façon, les colonnes de ${}^tU$ et de $\overline{U}$ forment des bases orthonormée de $\mathbb{C}^2$ (direct à partir de la même propriété pour U) et ces matrices sont dans $\mathcal{U}$.

II.3.3. Soient $U, V \in \mathcal{U}$. On a

$${}^t\overline{(UV)}UV = {}^t\overline{V}{}^t\overline{U}UV = {}^t\overline{V}V = I_2$$

et $UV \in \mathcal{U}$.

II.4. Il existe un vecteur non nul x tel que $Ux = \lambda x$. En prenant la norme de ces vecteurs, on obtient

$${}^t\overline{x}{}^t\overline{U}Ux = |\lambda|^2\|x\|^2$$

Comme $U \in \mathcal{U}$, on a donc $\|x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2$ et la non nullité de x implique

$$|\lambda| = 1$$

Partie III.

III.1.1. On écrit que les colonnes de U forment une base orthonormée (trois relations) et que le déterminant de U vaut 1. Les relations sont donc

$$|a|^2 + |b|^2 = 1,\ |c|^2 + |d|^2 = 1,\ \overline{a}c + \overline{b}d = 0,\ ad - bc = 0$$

III.1.2. Si $U \in \mathcal{SU}$ alors $U^{-1} = {}^t\overline{U}$ et, par les formules de Cramer (ici $det(U) = 1$), on a une autre expression de U^{-1} :

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

On obtient donc $\overline{a} = d$ et $\overline{b} = -c$.

III.1.3. Si $U \in \mathcal{SU}$ alors U est donc du type $\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$. Comme chaque colonne est normée, on a aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
Réciproquement, si U est du type précédent alors les colonnes sont normées, orthogonales et le déterminant vaut $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On a donc $U \in \mathcal{SU}$.

III.2.1. Un calcul immédiat donne

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2Re(a)\lambda + 1$$

Comme $|a|^2 + |b|^2 = 1$, on a $|Re(a)| \leq |a| \leq 1$ et il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = Re(a)$ (par exemple, $\arccos(Re(a))$). On a alors

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$$

Les valeurs propres de U sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

III.2.2. $a = i/2$ et $b = -\sqrt{3}/2$ vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et ainsi $T \in \mathcal{SU}$. Les calculs de la partie I donnent

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

P est bien dans $\mathcal{SU}$ (elle a la forme indiquée en $III.1.3$) et $i = e^{i\pi/2}$ ($\theta = \pi/2$ convient).

Partie IV.

IV.1.1. Les conditions sur a, b, c, d pour que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ sont

$$a + d = 0,\ a = \overline{a},\ d = \overline{d},\ b = \overline{c}$$

a et d sont donc des réels opposés et b et c des complexes conjugués. On a donc $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec a, r, s réels.
Réciproquement, toute matrice du type précédent est dans $\mathcal{V}$ (quatre propriétés vérifiées). On a donc

$$\mathcal{V} = \{aE_1 + rE_2 + sE_3/\ (a, r, s) \in \mathbb{R}\} = Vect(E_1, E_2, E_3)$$

$\mathcal{V}$ est donc un espace vectoriel (réel) et on en a une famille génératrice. Cette famille étant libre (si $aE_1 + rE_2 + sE_3 = 0$ on obtient une matrice complexe dont les coefficients sont nuls ce qui implique $a = r = s = 0$), c'est une base de $\mathcal{V}$.

IV.1.2. L'application $< .,. >$ est symétrique ($tr(AB) = tr(BA)$ de manière générale) et linéaire par rapport à la seconde variable. En outre,

$$\forall A \in \mathcal{V},\ 2 < A, A >= tr(AA) = tr({}^t\overline{A}A) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

où x et y sont les colonnes de A (calcul de $I.4$). C'est une quantité positive qui n'est nulle que si x et y, c'est à dire A, l'est. L'application $< .,. >$ est donc définie positive et c'est finalement un produit scalaire sur $\mathcal{V}$.
Le calcul précédent donne (en notant x et y les colonnes de A)

$$\|A\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) = a^2 + |r + is|^2 = a^2 + |r - is|^2 = -det(A)$$

IV.1.3. On en déduit immédiatement que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ < E_i, E_i >= \|E_i\|^2 = 1$$

Par ailleurs un calcul élémentaire donne (E_1E_2 et E_1E_3 ont des termes diagonaux nuls et E_2E_3 a pour termes diagonaux i et $-i$)

$$\forall i \neq j,\ < E_i, E_j >= 0$$

Ainsi, la famille (E_1, E_2, E_3) est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

IV.2.1. ℓ_P est clairement linéaire. Par ailleurs, si $A \in \mathcal{V}$ alors $\ell(A) \in \mathcal{V}$ (trace nulle car la trace est un invariant de similitude et égale à la transposée du conjugué car $P \in \mathcal{SU}$ et $A \in \mathcal{V}$). C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{V}$.
Elle est bijective d'inverse $\ell_{P^{-1}}$. C'est donc un automorphisme de $\mathcal{V}$. Pour $A \in \mathcal{V}$, on a (la trace est un invariant de simlitude)

$$2\|PAP^{-1}\|^2 = tr(PA^2P^{-1}) = tr(A^2) = 2\|A\|^2$$

ce qui montre que ℓ_P conserve la norme.

IV.2.2. Si $PQ \in \mathcal{SU}$ on sait déjà que $PQ \in \mathcal{U}$ (question $II.3.3$). Par ailleurs, $det(PQ) = det(P)det(Q) = 1$. Ainsi, $\mathcal{SU}$ est stable par produit. On a

$$\ell_P \circ \ell_Q(A) = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1} = \ell_{PQ}(A)$$

et ceci étant vrai pour tout choix de A, $\ell_P \circ \ell_Q = \ell_{PQ}$.

IV.3.1. On a $D_\theta^{-1} = D_{-\theta}$ et

$$\ell_{D_\theta}(E_1) = D_\theta E_1 D_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_1$$

$$\ell_{D_\theta}(E_2) = D_\theta E_2 D_{-\theta} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\theta} \\ e^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \cos(2\theta)E_2 + \sin(2\theta)E_3$$

$$\ell_{D_\theta}(E_3) = D_\theta E_3 D_{-\theta} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{2i\theta} \\ -ie^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix} = -\sin(2\theta)E_2 + \cos(2\theta)E_3$$

IV.3.2. La matrice de ℓ_{D_θ} dans la base orthonormée (E_1, E_2, E_3) est donc $R_{2\theta}$. Pour conclure, nousn devons choisir une orientation pour $\mathcal{V}$. Le plus cohérent est **d'orienter $\mathcal{V}$ par la base des E_i**. La base est elors orthonormée directe et ℓ_{D_θ} est alors une rotation d'axe dirigé par E_1 et d'angle 2θ.

IV.4. On a l'existence de $P \in \mathcal{SU}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $U = PD_\theta P^{-1}$ et donc

$$\ell_U = \ell_P \circ \ell_{D_\theta} \circ \ell_{P^{-1}} = \ell_P \circ \ell_{D_\theta} \circ (\ell_P)^{-1}$$

Dans la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3)$, on a donc

$$Mat(\ell_U, \mathcal{E}) = QR_{2\theta}Q^{-1} \quad \text{où} \quad Q = Mat(\ell_P, \mathcal{E})$$

Comme ℓ_P est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{V}$ et comme $\mathcal{E}$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$, Q est une matrice orthogonale. Q est donc une matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{E}$ vers une autre base orthonormée $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Par formule de changement de base, on a

$$Mat(\ell_U, \mathcal{F}) = R_{2\theta}$$

Ainsi, ℓ_U est une rotation de $\mathcal{V}$. L'axe est dirigé par F_1 et une mesure de l'angle est 2θ si ℓ_P est orthogonal direct et -2θ sinon.

IV.5.1. On a $iH = \begin{pmatrix} iq & -\bar{b} \\ b & -iq \end{pmatrix}$ et donc

$$H = qE_1 + Im(b)E_2 + Re(b)E_3 \in \mathcal{V}$$

IV.5.2. U est un polynôme en H et commute donc avec H. Ainsi

$$\ell_U(H) = UHU^{-1} = H$$

IV.5.3. H est laissé stable par la rotation ℓ_U. Si $H \neq 0$ alors il dirige l'axe de la rotation. Deux cas se présentent donc

- Si $U \in Vect(I_2)$ alors $\ell_U = Id_{\mathcal{V}}$ est une rotation d'angle nul. On ne peut de L'axe mais seulement d'UN axe (toute droite convient).
- Sinon, $H \neq 0$ et H dirige l'axe de la rotation. On a $H = qE_1 + sE_2 + rE_3$.

IV.6. D'après la question $IV.4$, ℓ_T est une rotation d'angle π. D'après la question précédente, l'axe de la rotation est dirigé par $\frac{1}{2}E_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}E_3$. Ici, on a pas besoin de préciser l'orientation car $\pi = -\pi[2\pi]$.

IV.7.1. Si U a une valeur propre double λ alors (question $III.2.1$) alors $\lambda = e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ et donc $\theta = 0[\pi]$. On a ainsi $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. En reprenant les notations de $III.2.1$, on a $Re(a) = 1$ ou $Re(a) = -1$ et comme $|a|^2 + |b|^2 = 1$, c'est que $b = 0$ et $a = 1$ ou $a = -1$. On a donc deux matrices envisgeables qui sont I_2 ou $-I_2$. Elles sont diagonalisables dans toute base et on a donc le résultat voulu ($P = I_2$ convient).

IV.7.2. Si U a deux valeurs propres distinctes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ alors U est diagonalisable (il y a deux valeurs propres distinctes en dimension 2) et chaque sous-espace propre est une droite. Si on montre que ces deux droites sont orthognales alors en prenant un vecteur v_1 normé de l'un des sous-espaces propres et v_2 tel que (v_1, v_2) est une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$ alors v_2 sera dans l'autre sous-espace propre et la matrice de passage P de la base canonique à (v_1, v_2) sera dans $\mathcal{SU}$ et diagonalisera A ce qui nous permettra de conclure.

Soit donc x_1 vecteur propre associé à $e^{i\theta}$ et x_2 vecteur propre associé à $e^{-i\theta}$. On a

$$(Ux_1|Ux_2) = (e^{i\theta}x_1|e^{-i\theta}x_2) = e^{-2i\theta}(x_1|x_2)$$

Or, on a aussi

$$(Ux_1|Ux_2) = {}^t\overline{Ux_1}Ux_2 = {}^t\overline{x_1}{}^t\overline{U}Ux_2 = {}^t\overline{x_1}x_2 = (x_1|x_2)$$

et comme $e^{-2i\theta} \neq 1$ (valeurs propres distinctes), $(x_1|x_2) = 0$, ce qu'il fallait prouver.