*Les calculatrices sont autorisées.*

****

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

****

**Notation et Objectifs :**

On note :

- $\mathbb{N}$ : l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{R}$ : l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$ : l'ensemble des nombres complexes,
- $\mathcal{C}^0$ : le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathcal{C}^0_1$ : le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ des fonctions $f$ 1-périodique (c'est-à-dire telles que $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par $q$ l'application de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^0$, définie par :
pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $q(f) = F$ où $F$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$, associe $\int_x^{x+1} f(t)dt$.

On admet que $q$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction $F$ et de l'endomorphisme $q$.

**Tournez la page S.V.P.**

# PARTIE I

## Quelques propriétés de $F = q(f)$

**I.1/ Exemples.**

**I.1.1/** Expliciter $F(x)$, si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$.

**I.1.2/** Expliciter $F(x)$**,** si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$ (où $k$ est fixé dans $\mathbb{N}^*$).

**I.2/ Variation de** $F = q(f)$.

**On désigne maintenant par** $f$ **une fonction arbitraire de** $\mathbf{c}^{\mathbf{0}}$.

**I.2.1/** Montrer que la fonction $F$ est de classe $\mathbf{c}^{\mathbf{1}}$ sur $\mathbb{R}$**.** Expliciter $F'(x)$ en fonction de $f$ et de $x$.

**I.2.2/** Montrer que si la fonction $f$ est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction $F$ est croissante (respectivement décroissante) sur $J_{x_0}$.

**I.2.3/** Montrer que la fonction $F = q(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f$ appartient à $\mathbf{c}^{\mathbf{0}}_1$.

**I.2.4/** Expliciter $F(x)$, si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(p\,t)|$.

**On suppose de nouveau que** $f$ **désigne une fonction arbitraire de** $\mathbf{c}^{\mathbf{0}}$**.**

**I.2.5/** On suppose que la fonction $f$ admet une limite finie $L_1$ en $+\infty$.
Montrer que la fonction $F$ admet une limite $L_2$ (que l'on explicitera) en $+\infty$ ; on pourra étudier d'abord le cas où $L_1 = 0$.

**I.3/ Propriétés du graphe de** $F$ **.**

Soients $f \in \mathbf{c}^{\mathbf{0}}$ et $F = q(f)$.

On considère la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t)dt$.

**I.3.1/** Comparer $y(-u)$ et $y(u)$, si la fonction $f$ est impaire (respectivement paire).

**I.3.2/** Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction $F$ peut-on déduire des résultats obtenus en **I.3.1,** si la fonction $f$ est impaire (respectivement paire) ?

**I.4/ Étude d'un exemple.**

Soit $f(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$ , pour $t$ réel.

**I.4.1/** Montrer que la fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ .

**I.4.2/** La fonction $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ?

**I.4.3/** La fonction $f$ admet-elle une limite en $+\infty$ ? Si oui, laquelle ?

**I.4.4/** Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction $f$ (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$ ).

**I.4.5/** La fonction $f$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$ ?

**I.4.6/** Soit $F=q(f)$ .

**I.4.6.1/** Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction $F$ .

**I.4.6.2/** La fonction $F$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$ ?
(on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour $x$ appartenant à $\mathbb{R}_+$ ).

# PARTIE II

## L'endomorphisme $q$

**II.1/** L'endomorphisme $q$ est-il surjectif ?

**II.2/ Sur le noyau de ? .**

**On note désormais $Ker?$ le noyau de l'endomorphisme $q$ .**

**II.2.1/** Montrer que $f \in Ker? \Leftrightarrow [\ f \in \mathcal{C}_1$ et $\int_0^1 f(t)dt=0\ ]$.

**II.2.2/** Soit $(f,g)\in(\mathcal{C}_1)^2$. On note $\langle f \mid g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ .
On admettra, sans justification, que $\langle . | . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_1$ .
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ . On note $c_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c_k(t)=\cos(2p\,kt)$ .

**II.2.2.1/** Vérifier que $\boldsymbol{C}_k$ appartient à $\mathbf{c}_1^{\mathbf{0}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\langle \boldsymbol{C}_j \mid \boldsymbol{C}_k \rangle$ pour $(j,k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$.

**II.2.2.2/** $Ker\boldsymbol{?}$ est-il de dimension finie ?

**II.2.3/** Soit $f \in \mathbf{c}_1^{\mathbf{0}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $j_n(x) = \int_n^x f(t)dt$ pour $x \in [n, n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

**II.2.3.1/** Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $W_n = \frac{j_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{j_n(t)}{t^2} dt$.

**II.2.3.2/** Si on suppose que $f$ appartient à $Ker\boldsymbol{?}$, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} W_n$ ?

**II.2.3.3/** Si on suppose que $f$ n'appartient pas à $Ker\boldsymbol{?}$, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} W_n$ ?

**II.3/ Sur le spectre de $q$ .**

On note $Sp(q)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme $q$ **.**

Si $a$ est un nombre réel fixé, on note $h_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

**II.3.1/** Montrer que chaque $h_a$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $q$ **.**

**II.3.2/** Étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.

**II.3.3/** Expliciter l'ensemble $\left[Sp(q)\right] \cap \mathbb{R}_+$ .

# PARTIE III

## Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme $q$

Soit $l$ une valeur propre de l'endomorphisme $q$ .

On note $E_l$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $l$ qui est fixée dans toute cette partie.

On suppose $l > 0$.

**III.1/** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $I_k$ l'intervalle $\left]2kp, (2k+1)p\right[$.

On pose, pour tout $t$ de l'intervalle $I_k$ : $g(t) = t\left(\dfrac{\cos t}{\sin t}\right) + \ln\left(\dfrac{\sin t}{l\, t}\right)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

**III.1.1/** Soit $r$ la fonction définie sur $I_k$, par : $r(t) = t\sin(2t) - t^2 - \sin^2 t$.
Étudier la fonction $r$ sur $I_k$ et préciser son signe.

**III.1.2/** Montrer que $g$ définit une bijection de $I_k$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

On se propose de montrer l'existence, dans $E_l$, d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres.

**III.2/** Soit $g = a + ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \left]0,+\infty\right[$.

**III.2.1/** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_x^{x+1} e^{g\,t}\,dt$ .

**III.2.2/** À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = e^{at}\cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme $q$ associé à la valeur propre $l$ ?

**III.3/** En déduire une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme $q$ .

**Fin de l'énoncé**