Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Ce problème porte sur l'étude d'une suite double et de différents contextes dans lesquels on retrouve cette suite.

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}$ privé de 0, par $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$.

On note $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$, on note $M = \left(m_{p,q}\right)_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2}$ où $m_{p,q}$ est l'élément de la ligne p et de la colonne q. Par exemple $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ sera noté $M = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} \end{pmatrix}$.

Pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M et $com(M)$ la comatrice de M.

$\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ désigne le sous-espace de $\mathbf{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Les parties **II, III** et **IV** de ce problème sont indépendantes entre elles ; seule la suite étudiée dans la partie **I** apparaît dans une question de chacune de ces parties.

PARTIE I

On définit la suite double de nombres réels $\left(a_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ par :

(i) $a_{0,0}=1$

(ii) pour tout $p\in\mathbf{N}^*$, $a_{p,0}=0$

(iii) pour tout $q\in\mathbf{N}^*$, $a_{0,q}=0$

(iv) pour tout $(p,q)\in\mathbf{N}^2$, $a_{p+1,q+1}=a_{p,q}+(p+1)a_{p+1,q}$.

La considération d'un tableau, dans lequel les $a_{p,q}$ sont disposés avec p indice de ligne et q indice de colonne, pourra se révéler d'une utilité certaine.

I.1. Pour $q\in\mathbf{N}$, calculer $a_{1,q}$.

I.2. Calculer $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$.

I.3. Pour $q\geq 2$, exprimer $a_{2,q}$ en fonction de $a_{2,q-1}$. En déduire la valeur de $a_{2,q}$.

I.4. Pour $p\in\mathbf{N}$, on considère la propriété P_p : " pour tout $q\in\mathbf{N}$, on a $a_{p,q}\in\mathbf{N}$ ".

Montrer que pour tout $p\in\mathbf{N}$, la propriété P_p est vraie.

I.5. Pour $p>q$, calculer $a_{p,q}$.

I.6. Pour $p\in\mathbf{N}$, calculer $a_{p,p}$.

I.7. Pour $n\in\mathbf{N}$, on désigne par A_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ (c'est-à-dire à $n+1$ lignes et à $n+1$ colonnes), dont le terme de la ligne p et de la colonne q est $a_{p,q}$, pour tout $(p,q)\in[\![0,n]\!]^2$.
Expliciter les matrices A_2, A_3, A_4 et A_5.

PARTIE II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

II.1. Soit $M = \left(m_{p,q}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$.

II.1.1. Montrer que $\det(M) \in \mathbf{Z}$.

II.1.2. Montrer que $com(M) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$.

II.1.3. On rappelle qu'une matrice M est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$ si et seulement si M^{-1} existe et appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$. Montrer que M est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.

II.2. On définit la suite $\left(B_p\right)_{p\in\mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ par : $B_0 = 1$ et pour $p \in \mathbf{N}^*$, $B_p = \prod_{j=0}^{p-1}(X-j)$.

II.2.1. Montrer que $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$; on notera $(\mathcal{B})$ cette base.

On note $(\mathcal{X})$ la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

On note P_n la matrice de passage de la base $(\mathcal{X})$ à la base $(\mathcal{B})$ et Q_n la matrice de passage de la base $(\mathcal{B})$ à la base $(\mathcal{X})$.

II.2.2. On prend $n = 4$, expliciter les matrices P_4 et Q_4.

II.2.3. Montrer que P_n est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

II.2.4. Calculer $\det(P_n)$.

II.2.5 Montrer que Q_n est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

On note $Q_n = \left(\beta_{p,q}\right)_{(p,q)\in\llbracket 0,n\rrbracket^2}$. Pour tout $q \in \llbracket 0,n\rrbracket$, on a donc $X^q = \sum_{p=0}^{q} \beta_{p,q} B_p$.

II.2.6. En donnant à X des valeurs particulières, déterminer les coefficients $\beta_{0,q}$, $\beta_{1,q}$, $\beta_{2,q}$ pour $q \in \llbracket 0,n\rrbracket$.

II.2.7. Montrer que $Q_n = A_n$ où A_n est la matrice définie au **I.7**.

PARTIE III

On note F l'espace vectoriel réel des applications de classe C^∞ définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On définit l'application ϕ de F dans F par :

$$\phi(f)=g \quad \text{où} \quad g(x)=xf'(x).$$

Pour $q\in\mathbf{N}^*$, on note $\phi^q=\phi\circ\phi^{q-1}$; ainsi $\phi^2=\phi\circ\phi$ (par convention : $\phi^0=id_F$).

III.1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de F. Est-il surjectif ? Est-il injectif ? Préciser le noyau de ϕ.

III.2. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de ϕ.

III.3. Pour $f\in F$, expliciter $\phi^2(f)$. Déterminer le noyau de ϕ^2 et en donner une base.

III.4. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers $d_{p,q}$ tels que, pour tout $q\in[\![1,n]\!]$ et tout $f\in F$, on ait la relation : pour tout x dans $]0,+\infty[$, $\phi^q(f)(x)=\sum_{p=1}^{q} d_{p,q}x^p f^{(p)}(x)$, où $f^{(p)}$ est la dérivée p-ième de f.
On admet que cette décomposition est unique.

III.5. On convient que $d_{0,0}=1$ et que, pour $p\in\mathbf{N}^*$ et $q\in\mathbf{N}^*$, $d_{p,0}=d_{0,q}=0$ et $d_{p,q}=0$ si $p>q$.
Montrer que pour tout $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$, on a $d_{p,q}=a_{p,q}$, où les $a_{p,q}$ sont les termes définis dans la partie **I**.

PARTIE IV

IV.1 Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(t)=\exp((\exp t)-1)$, où exp est la fonction exponentielle.

IV1.1. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 4 en $t=0$.

IV1.2. Pour n variant de 1 à 4, en déduire la valeur de la dérivée n-ième de φ en 0.

Soit E un ensemble de cardinal n, $n \in \mathbf{N}$. On appelle partition de E, tout ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont la réunion est E. Chaque partie de la partition s'appelle une classe.

IV.2. Pour tout entier $j \in \mathbf{N}^*$, on note P_n^j le nombre de partitions de E en j classes.
Par convention, on note $P_0^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}^*$, $P_n^0 = P_0^j = 0$.

IV.2.1. Pour $j > n$, calculer P_n^j.

IV.2.2. Calculer P_n^1 *et* P_n^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

IV.2.3. On suppose $j \geq 2$ *et* $n \geq 1$. Soit $a \in E$.
En distinguant parmi les partitions de E en j classes, celles pour lesquelles le singleton $\{a\}$ est une classe de la partition, justifier l'égalité $P_n^j = P_{n-1}^{j-1} + jP_{n-1}^j$.

IV.2.4. En déduire que pour tout $(j,n) \in \mathbf{N}^2$, on a $P_n^j = a_{j,n}$, les $a_{j,n}$ étant les termes définis dans la partie **I**.

IV.3. On note P_n le nombre de partitions de E. Par convention $P_0 = 1$.

IV.3.1. Pour n variant de 1 à 4, calculer P_n et comparer P_n à $\varphi^{(n)}(0)$ où φ est la fonction définie en **IV.1.**

IV.3.2. Exprimer P_n à l'aide des P_n^j. Dans la suite, on admettra la formule

(1) $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k$ où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

IV.3.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $P_n \leq n!$

IV.4 Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

IV.4.1. Déduire de **IV.3.3.** que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à 1.

IV.4.2. Montrer à l'aide de **(1)** que pour $|x| < 1$, on a $s'(x) = s(x)\exp x$ (on pourra développer en série entière $\exp x$ et utiliser le produit de Cauchy de deux séries entières).

IV.4.3. En déduire $s(x)$.

IV.4.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $P_n = \varphi^{(n)}(0)$.

Fin de l'énoncé.

Tournez la page S.V.P.