Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notation et but du problème

On désigne par :

- E_0 : le $\mathbf{R}$ - espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, et qui vérifient $f(0)=0$;
- E_1 : l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$;
- E_2 : l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(f'(t)\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

On note :

$$N_1(f)=\left[\int_{\mathbf{R}_+^*}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt\right]^{1/2} \quad \text{pour} \quad f\in E_1 \; ; \qquad N_2(f)=\left[\int_{\mathbf{R}_+}\left(f'(t)\right)^2 dt\right]^{1/2} \quad \text{pour} \quad f\in E_2 .$$

Le but de ce problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

Les parties **I** et **II** sont consacrées à deux exemples, la partie **III** aborde le problème de comparaison de façon plus générale.

PARTIE I – Exemple 1

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(t) = \text{Arctan } t$ (où Arctan désigne la fonction Arctangente).

I.1/ Montrer que f appartient à E_1.

I.2/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $H_x : t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, et qu'en particulier f appartient à E_2.

I.3/ Calcul de $N_2(f)$.

Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}_+} H_x(t)\,dt$.

I.3.1/ Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

I.3.2/ Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x \neq 1$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de la variable T :

$$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)}$$

I.3.3/ En déduire l'expression explicite de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x \neq 1$.

I.3.4/ Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

I.4/ Etudier le signe de $u - \text{Arctan } u$, pour $u \in \mathbf{R}_+$.

I.5/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{\text{Arctan } (xt)}{t(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

I.6/ Calcul de $N_1(f)$**.**

Pour $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $\theta(x) = \int_{\mathbf{R}_+^*} G_x(t)\,dt$.

I.6.1/ Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

I.6.2/ Montrer que la fonction θ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$.

I.6.3/ Expliciter $\theta'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

I.6.4/ Expliciter $\theta(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

I.6.5/ Etablir une relation entre $\left[N_1(f)\right]^2$ et $\theta(1)$.

I.6.6/ En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

PARTIE II – Exemple 2

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ (où ln désigne la fonction logarithme népérien).

II.1/ Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbf{R}_+$. En déduire que f appartient à E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

II.2/ Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \to 0^+$ (respectivement lorsque $t \to +\infty$).

II.3/ Montrer que f appartient à E_1 .

II.4/ Calcul d'une intégrale.

II.4.1/ Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

On note désormais $J = \displaystyle\int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2}\, dt$.

II.4.2/ Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k} \ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de : $J_k = \displaystyle\int_{]0,1[} \left(-t^{2k} \ln t\right) dt$.

II.4.3/ Justifier avec soin l'égalité : $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} \left(-t^{2k} \ln t\right) dt$.

II.4.4/ Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J, sachant que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II.5/ Calcul de $N_1(f)$.

Pour simplifier, on note $I = \left(N_1(f)\right)^2 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt$.

On rappelle que $shu = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$, $chu = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ pour ($u \in \mathbf{R}$) et la relation $ch^2u - sh^2u = 1$.

II.5.1/ Montrer que $I = 2\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}\, dt$.

II.5.2/ Justifier le changement de variable $u = f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ dans l'intégrale obtenue dans la question **II.5.1** ; que devient I quand on effectue ce changement ?
Même question pour le changement de variable $v = e^{-u}$.

II.5.3/ En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

PARTIE III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part, les ensembles E_1 et E_2, et, d'autre part, les fonctions N_1 et N_2.

III.1/ Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et telle que $f(0)=0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g(t)=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t>0$. On pose $\alpha = f'(0)$.

III.1.1/ Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) lorsque $t \to 0^+$?

III.1.2/ Exprimer $f'(t)-\sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbf{R}_+^*$.

III.1.3/ Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t).g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$? (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).

III.1.4/ Etablir, pour $x>0$, la relation :

$$(R) \quad \int_{]0,x]} \left(f'(t)\right)^2 dt = \frac{1}{2}\left(g(x)\right)^2 + \int_{]0,x]} \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 dt + \frac{1}{4}\int_{]0,x]} \left(h(t)\right)^2 dt.$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0,x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).

III.2/ Comparaison de E_1 et E_2.

III.2.1/ Déduire de la relation (R) l'inclusion : $E_2 \subset E_1$.

III.2.2/ Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$).

III.3/ Comparaison de N_1 et N_2.

III.3.1/ Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$ - espace vectoriel E_0.

On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.

III.3.2/ Justifier l'inégalité : $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.

III.3.3/ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit sur $\mathbf{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t}\sin(nt)$.
Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.

III.3.4/ Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E_2 ?

III.4/ Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) , montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; quelle est cette limite ?

Fin de l'énoncé.