Corrigé - CCP - 2004 - PSI - Maths 1, par Karine Fournier

PARTIE I - Exemple 1

Dans cette partie f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = Arctan(t)$ (où $Arctan$ désigne la fonction Arctangente).

1. On sait que la fonction Arctangente est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $Arctan(0) = 0$ donc $f \in E_0$. De plus $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t} = f'(0) = 1$ d'où la fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 et $0 \leqslant g(t) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi^2}{4t^2}$, donc la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $f \in E_1$.
2. Pour tout $x > 0$, la fonction $H_x : t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ avec $H_x(t) \leqslant \dfrac{1}{x^2(1+t^2)}$, cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $x > 0$ donc pour tout $x > 0$, H_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}^+, (f'(t))^2 = H_1(t)$, donc $f \in E_2$.
3. Calcul de $N_2(f)$.
   Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} H_x(t)dt$.
   (a) Pour tout $x > 0$, H_x est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto H_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $a > 0$ et tout $x \in [a, +\infty[$,
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant H_x(t) \leqslant H_a(t) \qquad \text{(hypothèse de domination)}$$
   la fonction H_a étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on sait par théorème de continuité que la fonction φ est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, par décomposition en éléments simples (deux pôles simples :$-1, -x^2$)
   $$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+x^2}\right)$$
   (c) D'après la décomposition en éléments simples précédente, pour $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, H_x(t) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)$$
   On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :
   $$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)dt = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x}\frac{1/x}{1+(t/x)^2}\right)dt$$
   $$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\lim_{b\to+\infty}\left[Arctan(t) - \frac{1}{x}Arctan(\frac{t}{x})\right]_0^b = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{2x(1+x)}$$
   (d) Par définition de $N_2(f)$ avec $(f'(t))^2 = H_1(t)$ on a : $N_2(f) = \sqrt{\varphi(1)}$ et par continuité de φ en 1 on aura : $N_2(f) = \sqrt{\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. La fonction $p : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto u - Arctan(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+, p'(u) = \dfrac{u^2}{1+u^2}$, la fonction p est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $p(0) = 0$ donc
$$\forall u \in \mathbb{R}_+, u - Arctan(u) \geqslant 0$$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{Arctan(xt)}{t(t^2+1)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $G_x(t) \sim_0 \dfrac{x}{1+t^2}$ et $G_x(t) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2t^3}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, G_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Calcul de $N_1(f)$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t)dt$ et $G : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \text{x} \mathbb{R}_+^* \mapsto G_x(t)$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction G_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto G_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On a vu que $\forall u \in \mathbb{R}^+, Arctan(u) \leqslant u$ et donc pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0, a]$:
   $$0 \leqslant G_x(t) \leqslant \frac{xt}{t(1+t^2)} \leqslant \frac{a}{1+t^2} \quad \text{(hypothèse de domination avec } t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+)$$
   On en déduit par application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que la fonction θ est continue sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$ et donc θ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) On sait déjà que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de plus la fonction G est dérivable par rapport à sa première variable x pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.
   On aura donc pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $0 \leqslant \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, on en déduit que $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par domination, la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec la formule de Leibniz : $\theta'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt$.
   (c) D'après ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \theta'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt$. Pour $x > 0$, on aura donc $\theta'(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} H_{\frac{1}{x}}(t)dt = \frac{1}{x^2}\varphi(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ d'après le résultat de la question 3b et par continuité en 0 de θ', la formule est encore vraie pour $x = 0$.
   (d) On déduit du résultat précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \theta(x) - \theta(0) = \dfrac{\pi}{2} ln(1+x) = \theta(x)$.
   (e) $N_1^2(f) = \displaystyle\lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2}dt$. Par intégration par parties avec $f(t) = Arctan(t)$, on aura :
   $$\int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2f'(t)f(t)}{t}dt$$
   or $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \frac{f^2(t)}{t} = \lim_{a \to 0^+} Arctan(t)\frac{Arctan(t)}{t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \frac{Arctan^2(t)}{t} = 0$, on en déduit que :
   $$N_1^2(f) = \int_0^{+\infty} \frac{2Arctan(t)}{t(1+t^2)}dt = 2\theta(1) = \pi ln(2)$$

On en déduit que $N_1(f) = \sqrt{\pi ln(2)}$ et donc $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{ln(2)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ (où ln désigne la fonction logarithme népérien).

7. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On en déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}^+$ et f'^2 est clairement intégrable sur $\mathbb{R}^+$(de primitive Arctangente sur $\mathbb{R}^+$) donc $f \in E_2$. De plus $N_2(f) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
8. Pour t au voisinage de 0, on a (par développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+t^2}$) : $ln(t + \sqrt{1+t^2}) = ln(1 + t + o(t)) = t + o(t)$ alors $f(t) \sim_0 t$.
On a aussi au voisinage de $+\infty$:
$$f(t) = ln(t) + ln(1 + \sqrt{1 + 1/t^2}) = ln(t) + ln(1 + \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2)) = ln(t) + \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2)$$
on en déduit que $f(t) \sim_{+\infty} ln(t)$.
9. D'après les équivalents précédents, $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\dfrac{f^2(t)}{t^2} =_{+\infty} o(\dfrac{1}{t^{3/2}})$ et donc $f \in E_1$.
10. Calcul d'une intégrale.
   (a) La fonction $h : t \mapsto -\dfrac{ln(t)}{1-t^2}$ est continue, positive sur $]0,1[$ et est prolongeable par continuité en 1 (de limite égale à 1/2). De plus au vosiinage de 0, on a : $h(t) = o(1/\sqrt{t})$ et donc h est intégrable sur $]0,1[$.
   $$\text{On note désormais } J = \int_{]0,1[} \frac{-lnt}{1-t^2}dt.$$
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto -t^{2k}ln(t)$ est continue et positive sur $]0,1]$ avec $f_k(t) = o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont intégrables sur $]0,1[$. Par intégration par parties,
   $$\int_a^b -t^{2k}ln(t)dt = \left[-t^{2k+1}ln(t)/(2k+1)\right]_a^b + \int_a^b \frac{t^{2k}}{2k+1}dt$$
   Donc : $J_k = \lim\limits_{a\to 0}\lim\limits_{b\to+\infty} \displaystyle\int_a^b -t^{2k}ln(t)dt = \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont continues et intégrables sur $]0,1[$, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $h : t \in]0,1[\mapsto -\dfrac{ln(t)}{1-t^2}$, la série $\sum \int_{]0,1[} |f_k| = \sum J_k$ converge donc h est intégrable sur $]0,1[$ et
   $$J = \int_0^1 h(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k.$$

(d) On a par convergence des trois séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit que $J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

11. Calcul de $N_1(f)$.

Pour simplifier, on note $I = (N_1(f))^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt$.

(a) Pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a par intégration par parties :

$$\int_a^b \frac{f^2(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2f'(t)f(t)}{t} dt$$

Or pour $f(t) = ln(t + \sqrt{1+t^2})$, on a déjà vu : $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\lim\limits_{a \to 0^+} \frac{f^2(t)}{t} = \lim\limits_{a \to 0^+} t \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 = 0$, on avait aussi (voir question 7) : $f(t) \sim_{+\infty} ln(t)$ et donc $\frac{f^2(t)}{t} \sim_{+\infty} \frac{ln^2(t)}{t}$ et donc $\lim_{b \to +\infty} \frac{f^2(t)}{t} = 0$. On en déduit que :

$$I = 2\int_0^1 \frac{f'(t)f(t)}{t} dt = 2\int_0^1 \frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}dt}$$

(b) Pour le calcul de I, on effectue le changement de variable $u = f(t)$ sachant que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et donc $f(t) - f(0) = Argsh(t) = f(t)$ car $f(0) = 0$, on en déduit que $u = f(t) \Leftrightarrow t = sh(u)$ et alors par ce changement de variable

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u}{sh(u)} du$$

On sait que $sh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = e^u \left(\frac{1 - e^{-2u}}{2}\right)$, on effectue alors dans I le changement de variable $v = e^{-u} = \psi(u) \Leftrightarrow u = -ln(v)$ avec ψ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$ et $\psi'(u) = -e^{-u} = \frac{-1}{e^u}$, donc

$$I = \int_0^1 -\frac{ln(v)}{1-v^2} dv = J = \frac{\pi^2}{8}$$

(c) on en déduit que $N_1(f) = \sqrt{I} = \sqrt{J} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part, les ensembles E_1 et E_2, et, d'autre part, les fonctions N_1 et N_2.

12. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0. On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t > 0$. On pose $\alpha = f'(0)$.

   (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(0) = 0$ donc $f(t) = f(t) - f(0)$ et donc h est prolongeable par continuité en 0 avec $\lim\limits_{t \to 0^+} h(t) = f'(0) = \alpha$. On a : $g(t) = \sqrt{t}h(t)$ et donc $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$.

   (b) On vérifie aisément par dérivation d'un quotient que : $\forall t > 0, \sqrt{t}g'(t) = f'(t) - \frac{1}{2}h'(t)$.

   (c) On déduit des questions précédentes, par continuité de f' en 0, que $\lim\limits_{t \to 0^+} \sqrt{t}g'(t) = \dfrac{\alpha}{2}$, de plus $g(t)g'(t) = h(t)\sqrt{t}g'(t)$, donc $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t)g'(t) = \dfrac{\alpha^2}{2}$.

   (d) Des limites calculées précédemment, on obtient que $t \mapsto \sqrt{t}g'(t), t \mapsto g(t)g'(t), t \mapsto h(t)$ sont prolongeables par continuité en 0^+, or elles sont aussi continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x > 0$, ces trois fonctions sont intégrables sur $]0, x]$. On a aussi
   $f'^2(t) = g(t)g'(t) + (\sqrt{t}g'(t))^2 + \frac{1}{4}h^2(t)$ alors si $f \in E_2$, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]0, x]$ pour tout $x > 0$, alors par intégration sur $]0, x]$ et linéarité de l'intégrale, on aura :

$$(R) \qquad \int_{]0,x]} (f'(t))^2 \, dt = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_{]0,x]} \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 dt + \frac{1}{4} \int_{]0,x]} (h(t))^2 \, dt.$$

13. Comparaison de E_1 et E_2.

   (a) Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle, la relation (R) entraine :

$$\forall x > 0, \qquad \int_{]0,x]} (f'(t))^2 \, dt \geqslant \frac{1}{4} \int_{]0,x]} (h(t))^2 \, dt$$

   On en déduit que si $f \in E_2$ alors la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_{]0,x]} (f'(t))^2 \, dt$ existe et est finie, alors la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_{]0,x]} (h(t))^2 \, dt$ est majorée et donc la fonction positive, continue h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc si $f \in E_2$ alors $f \in E_1$, d'où l'inclusion : $E_2 \subset E_1$.

   (b) Prenons la fonction $f : t \mapsto sin(t)$, il est clair que $f \in E_0$, de plus $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f^2(t)}{t^2} = 1$ et $0 \leqslant \dfrac{f^2(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, on en déduit que $f \in E_1$, mais $f'(t) = cos(t)$ et la fonction positive f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ pour $\displaystyle\int_0^x f'^2(t)dt$).
   On en déduit qu'il y a une inclusion stricte entre E_2 et E_1 ! $E_1 \neq E_2$.

14. Comparaison de N_1 et N_2.

   (a) Il est clair que E_2 est non vide inclus dans l'espace vectoriel E_0. par linéarité de la dérivation et résultat sur l'intégrabilité d'une fonction positive, si $f \in E_2$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f \in E_2$. Soit $(f, g) \in E_2^2$, on a donc f'^2 et g'^2 sont continues, positives et intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, (f'(t) + g'(t))^2 = f'^2(t) + g'^2(t) + 2f'(t)g'(t)$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que pour tout $x > 0$,

$$\left(\int_0^x |f'(t)g'(t)| \, dt\right)^2 \leqslant \int_0^x f'^2(t)dt \int_0^x g'^2(t)dt$$

Et donc : $\forall x>0, \displaystyle\int_0^x |f'(t)g'(t)|\,dt \leqslant N_2(f).N_2(g)$ et donc la fonction $x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \displaystyle\int_0^x |f'(t)g'(t)|\,dt$ est majorée et donc la fonction $f'g'$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par somme de trois fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, que $(f'+g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc que $(f+g)\in E_2$. On a donc montré E_2 est un sous-espace vectoriel de E_0.
On admet sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.

(b) On a déjà vu que $E_2\subset E_1$ et pour $f\in E_2 : \forall x>0, \quad \displaystyle\int_{]0,x]}(f'(t))^2\,dt \geqslant \frac{1}{4}\int_{]0,x]}(h(t))^2\,dt$, par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ et croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $N_1(f)\leqslant 2N_2(f)$.

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t)=e^{-t}sin(nt)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in E_0$ et $\forall t\in\mathbb{R}^+, f_n'(t)=e^{-t}(ncos(nt)-sin(nt))$, donc $f_n'^2(t)=e^{-2t}(ncos(nt)-sin(nt))^2$, on en déduit que $0\leqslant f_n'^2(t)\leqslant (n+1)e^{-2t}$, donc $f_n'^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n\in E_2$.

$$N_2^2(f_n)=\int_0^{+\infty} e^{-2t}(ncos(nt)-sin(nt))^2dt=\int_0^{+\infty} e^{-2t}((n^2-1)cos^2(nt)-nsin(2nt)+1)dt$$

$$N_2^2(f_n)=\int_0^{+\infty} e^{-2t}\left(\frac{n^2-1}{2}(cos(2nt)+1)-nsin(2nt)+1\right)dt$$

$$N_2^2(f_n)=\frac{n^2+1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt+\int_0^{+\infty} e^{-2t}\left(\frac{n^2-1}{2}cos(2nt)-nsin(2nt)\right)dt$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt=\frac{1}{2}, \int_0^{+\infty} e^{-2t}e^{2int}dt=\frac{1}{2(1-in)}=\frac{1}{2(n^2+1)}+i\frac{n}{2(n^2+1)}$, on en déduit que :

$$N_2^2(f_n)=\frac{n^2}{4} \quad N_2(f_n)=\frac{n}{2}$$

(d) On sait déjà que N_1 est dominée par N_2. Supposons que N_2 soit dominée par N_1 sur E_2 alors il existe une constante $\alpha>0$ telle que $\forall f\in E_2, N_2(f)\leqslant \alpha N_1(f)$. En prenant les fonctions f_n, on aurait $\forall n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{n}{2}\leqslant \alpha N_1(f_n)$. La fonction $t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \dfrac{sin^2(nt)}{t^2}$ est positive, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc : $0\leqslant N_1^2(f_n)\leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sin^2(nt)}{t^2}dt$.
Par le changement de variable $u=nt$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$0\leqslant N_1^2(f_n)\leqslant n\int_0^{+\infty}\frac{sin^2(u)}{u^2}du$$

On en déduit que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\leqslant \dfrac{n}{2}\leqslant \alpha\sqrt{n}\beta$ avec $\beta=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sin^2(u)}{u^2}du$, ce qui absurde. La norme N_2 n'est donc pas dominée par la norme N_1 sur E_2. Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur E_2.

15. On suppose que $f\in E_2$, d'après la relation (R) pour tout $x>0$, on a :
$\displaystyle\int_{]0,x]}\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2dt\leqslant \int_{]0,x]}(f'(t))^2dt\leqslant N_2^2(f)$, on en déduit que la fonction positive $t\mapsto\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $\displaystyle\int_{]0,x]}\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On avait aussi $f_inE_2\Rightarrow f\in E_1$, toujours par la relation (R), on obtient que la fonction

g^2 admet une limite finie en $+\infty$ (somme de trois fonctions admettant chacune une limite finie en $+\infty$) et donc g aussi.

Notons L la limite de g en $+\infty$, d'après la relation $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ avec $f \in E_2$, si $L \neq 0$ alors $f(t) \sim L\sqrt{t}$ au voisinage de $+\infty$ qui entraine $\dfrac{f^2(t)}{t^2} \sim \dfrac{L^2}{t}$ au voisinage de $+\infty$ et f n'appartient donc pas à E_1, ce qui est faux puisque $f \in E_2 \Rightarrow f \in E_1$, on en déduit que la limite de g en $+\infty$ est nulle.