CORRIGÉ DU DEVOIR N°3.

PARTIE 1.

1.) On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1, \qquad \cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

D'où :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_0(x) = 1, \quad t_1(x) = x, \quad t_2(x) = 2x^2 - 1, \quad t_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

2.) On a :

- t_0 n'a aucune racine et aucun extremum.
- t_1 admet 0 comme racine , -1 comme minimum égal à -1 et 1 comme maximum égal à 1.
- t_2 admet $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ comme racines, en 0 on a un minimum égal à -1 et en -1 ou 1 on a un maximum égal à 1.
- t_3 admet 0, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ comme racines, en $\dfrac{1}{2}$ ou -1 on a un minimum égal à -1 et en -$\dfrac{1}{2}$ ou 1 on a un maximum égal à 1.

Remarque. Ne pas oubler les extremums aux bornes du domaine $[-1,1]$.

3.) Racines de t_n.
On a :

$$t_n(x) = 0 \iff \cos(n \arccos x) = 0 \iff \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

La fonction arccos est une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$, donc :

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}.$$

Comme k est un entier alors k est élément de $[\![0, n-1]\!]$. Les racines de t_n sont les réels x_k avec k élément de $[\![0, n-1]\!]$.
Pour tout k compris entre 0 et $n-1$, on a

$$x_{n-k-1} = \cos\theta_{n-k-1} = \cos\frac{2(n-k-1)+1}{2n}\pi,$$

$$x_{n-k-1} = \cos\left(\pi - \frac{2k+1}{2n}\,\pi\right) = -\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\,\pi\right) = -x_k.$$

Les racines x_k sont opposées deux à deux.

4.1.) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,p\theta_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,p\,\frac{2k+1}{2n}\,\pi} = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p\pi}{n}}\right)^k.$$

Le complexe S_n est la somme d'une suite géométrique de raison $\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{n}}$, comme l'entier p est compris entre 1 et $n-1$ alors $\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{n}} \neq 1$, donc :

$$S_n = \mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{2n}}\,\frac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}p\pi} - 1}{\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{n}} - 1}\cdot$$

On sait que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{e}^{\mathrm{i}\,u} - 1 = \mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,u}{2}}\left(\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,u}{2}} - \mathbf{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,u}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)\,\mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,u}{2}}.$$

On en déduit que :

$$S_n = \mathbf{e}^{\frac{\mathrm{i}\,p\pi}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}\cdot$$

4.2.) Le nombre p est entier donc $\sin p\pi = 0$, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(p\theta_k) = \Re\left(Sn\right) = \frac{\sin p\pi}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} = 0.$$

5.) On sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2}\cdot$$

On a :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = \cos\Big((n+1)\arccos x\Big) + \cos\Big((n-1)\arccos x\Big),$$

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2\cos(n\arccos x)\,\cos(\arccos x).$$

La fonction arccos est une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$ donc :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \cos(\arccos x) = x.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2x\, t_n(x).$$

6.) Soit n un entier strictement positif, on montre par réccurence l'assertion suivante :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \forall k \in [\![1,n]\!], \quad t_k \text{ est une fonction polynomiale et } t_k(x) = 2^{k-1}x^k + \sum_{p=0}^{k-1} a_{p,k}x^p.$$

De la première question, on déduit que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$. On remarque que pour $n=0$, la fonction t_0 est constante, son coefficient dominant est 1.

On déduit de la question précédente que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x).$$

Si $\mathcal{P}(n)$ alors t_n et t_{n-1} sont éléments de $\mathcal{R}$ donc t_{n+1} est élément de $\mathcal{R}$.

Comme :

$$t_n(x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{p=0}^{n-1} a_{p,n}x^p, \quad t_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2} a_{p,n-1}x^p,$$

alors :

$$t_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \sum_{p=0}^{n} a_{p,n+1}x^p.$$

On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Big(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)\Big) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(1)$$

Donc pour tout entier naturel n, la fonction t_n est élément de $\mathcal{R}_n$ de coefficient dominant 1 si $n=0$ et 2^{n-1} si $n \geq 1$.

7.) Soit n un entier naturel non nul, on a montré à la question 4.1.) que les racines de t_n sont les $x_k = \cos\theta_k$ avec k entier compris entre 0 et $n-1$.

La fonction cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, les réels θ_k éléments de $[0,\pi]$ sont deux à deux distincts donc les racines x_k sont deux à deux distinctes.

Le polynôme T_n est de degré n donc il a au plus n racines complexes, comme il a n racines réelles distinctes il n'a pas de racines complexe non réelle.

PARTIE 2.

1.) Soit f un élément de $\mathcal{C}$, la fonction f est alors continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc bornée sur $[-1,1]$, soit :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \qquad \forall x \in [-1,1], \qquad |f(x)| \leq M.$$

La fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \left| \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On sait qu'une primitive de $x \in [0,1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$, de plus :

$$\lim_{a \longrightarrow 1} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \longrightarrow 1} \arcsin a = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$ est paire, intégrable sur $[0,1[$ donc intégrable sur $]-1,1[$, on en déduit que la fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

2.) Pour n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

On déduit de la question précédente, en particularisant $f(x) = x^n$, que ette intégrale est absolument convergente.

2.1.) On a :

$$I_0 = \Big[\arcsin x \Big]_{-1}^{1} = \pi, \qquad I_1 = \Big[-\sqrt{1-x^2} \Big]_{-1}^{1} = 0.$$

2.2.) Soit a et b éléments de $]-1,1[$, on intègre par parties $\displaystyle\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2} \Big]_a^b + (n+1) \int_a^b x^n \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2} \Big]_a^b + (n+1) \int_a^b \frac{x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$(n+2) \int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2} \Big]_a^b + (n+1) \int_a^b \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

On fait tendre a vers -1 et b vers 1, les intégrales étant convergentes alors :

$$(n+2)\, I_{n+2} = (n+1)\, I_n.$$

2.3.) On en déduit que :

$$I_2 = \frac{1}{2}\, I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4}\, I_2 = \frac{3\pi}{8}.$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{2p+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et impaire alors son intégrale est nulle, donc :

$$I_{2p+1} = 0.$$

3.1.) Les applications f et g sont éléments de $\mathcal{C}$ donc fg est élément de $\mathcal{C}$, on peut alors définir l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto < f|g > = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x \end{cases}$$

l'intégrale étant absolument convergente d'après la question 1.)
Montrons que cette application définie un produit scalaire :

- Symétrie : De la commutativité du produit dans $\mathcal{C}$, on déduit :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^2, \qquad < f|\, g > = < g|\, f > .$$

- Linéarité : De la linéarité des intégrales convergentes, on déduit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall (f_1, f_2, g) \in \mathcal{C}^3, \qquad < \lambda f_1 + f_2|\, g > = \lambda < f_1|\, g > + < f_2|\, g > .$$

On en déduit que l'application $< \ | \ >$ est une forme bilinéaire symétrique.

- Forme positive : On sait que l'intégrale entre -1 et 1 d'une fonction intégrable et positive sur $]-1,1[$ est positive donc :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \qquad < f|\, f > \geq 0.$$

- Forme définie : La fonction $x \longmapsto \dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable et positive sur $]-1,1[$, alors :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in]-1,1[, \quad \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = 0.$$

L'application f est continue sur $]-1,1[$, nulle sur $]-1,1[$ donc elle est nulle sur $[-1,1]$, on a montré que :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \qquad < f|\, f >= 0 \Longleftrightarrow f = 0_{\mathcal{C}}.$$

L'application $<\ |\ >$ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive, elle définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

3.2.) Montrons que la famille $\Big(t_p \ \Big|\ p \in [\![0,n]\!]\Big)$ est une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.

Calculons $< t_p|\, t_q >$, en effectuant le changment de variable $u = \arccos x$ qui est un C^1 difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$, on obtient :

$$< t_p|\, t_q >= \int_{-1}^{1} \frac{t_p(x)t_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} \cos(pu)\,\cos(qu)\,(-\mathrm{d}u),$$

$$< t_p|\, t_q >= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\Big((p+q)u\Big)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\Big((p-q)u\Big)\,\mathrm{d}u.$$

Les entiers p et q sont compris entre 0 et n, si $p \neq q$ alors :

$$< t_p|\, t_q >= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Big((p+q)u\Big)}{p+q}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Big((p-q)u\Big)}{p-q}\right]_0^{\pi} = 0.$$

De plus on a :

$$< t_0|\, t_0 >= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = I_0 = \pi,$$

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \qquad < t_p|\, t_p >= \int_0^{\pi} \cos^2(pu)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2pu)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

La famille $\Big(t_p \ \Big|\ p \in [\![0,n]\!]\Big)$ est une famille orthogonale de $n+1$ vecteurs non nuls donc c'est une famille libre, de plus la dimension de $\mathcal{R}_n$ est $n+1$, on a donc une famille orthogonale libre maximale c'est donc une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.
De plus on a :

$$||t_0|| = \sqrt{\pi}, \quad \forall p \in [\![1,n]\!], \quad ||t_p|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3.3.) Soit n un entier naturel non nul et k un élément de $[\![0,n-1]\!]$.
Le monôme X^k se décompose dans la base orthogonale $\Big(t_p \ \Big|\ p \in [\![0,k]\!]\Big)$, soit :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \qquad \exists (a_p)_{0\leq p\leq k} \in \mathbb{R}^{p+1}, \qquad X^k = \sum_{p=0}^{k} a_p t_p.$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^k\, t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = < X^k |\, t_n > = \sum_{p=0}^{k} a_p < t_p |\, t_n > .$$

La famille $\left(t_p \;\middle|\; p \in [\![0, n]\!]\right)$ est orthogonale donc :

$$\forall p \in [\![0, k]\!] \subset [\![0, n-1]\!], \qquad < t_p |\, t_n > = 0 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

4.) On veut montrer qu'il existe trois réels $a_0,\ a_1,\ a_2$ uniques, tels que pour tout polynôme P élément de $\mathcal{R}_5$, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{1}$$

4.1.) On suppose que l'égalité (1) est satisfaite pour tout P de $\mathcal{R}_5$, on détermine les réels $a_0,\ a_1,\ a_2$ en prennant successivement les polynômes $1,\ X,\ X^2$, on obtient :

$$\begin{cases} I_0 = a_0 + a_1 + a_2 \\ \\ I_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_2 \\ \\ I_2 = -\dfrac{3}{4}a_0 + \dfrac{3}{4}\,a_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = \pi \\ \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a_2 = 0 \\ -\dfrac{3}{4}a_0 + \dfrac{3}{4}\,a_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{\pi}{3} \\ a_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ a_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

4.2.) On vérifie que la solution trouvée convient pour $X^3,\ X^4,\ X^5$.
Pour X^3 et X^5, le polynôme P est impaire donc :

$$\frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\,P(0) + \frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Comme $I_3 = I_5 = 0$ alors l'égalité (1) est vérifiée.
Pour $P = X^4$ alors :

$$\frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\,P(0) + \frac{\pi}{3}\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{16}\right) = \frac{3\pi}{8} = I_4.$$

Si :

$$a_0 = a_1 = a_2 = \frac{\pi}{3}$$

alors l'égalité (1) est vérifiée pour tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{R}_5$.
Soit P un élément de $\mathcal{R}_5$, on a :

$$\exists!(\alpha_p)_{0\leq p\leq 5} \in \mathbb{R}^6, \qquad P = \sum_{p=0}^{5} \alpha_p X^p.$$

De plus on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{5} \alpha_p \int_{-1}^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Si $a_0 = a_1 = a_2 = \dfrac{\pi}{3}$ alors l'égalité (1) est satisfaite pour pour tout vecteur de la base canonique de $\mathcal{R}_5$ donc elle est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_5$.

5.1.) Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi \ : \ x \in]0,1[\longmapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

La fonction φ est définie et continue sur $]0,1[$, au voisinage de 0, on a $\varphi(x) \sim x^{\frac{7}{2}}$, donc $\lim_{0} \varphi = 0$, on prolonge par continuité φ en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, l'application φ est alors continue sur $[0,1[$ et positive.
Au voisinage de 1 on a :

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

L'application $x \in [0,1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0,1[$ donc l'application φ est intégrable sur $[0,1[$.

5.2.) On effectue le changement de variable $u = 2x-1$ qui est un C^1 difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]-1,1[$, on obtient :

$$J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^4} \int_{-1}^{1} \frac{(1+u)^4}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

On particularise $P = (X+1)^4$, on obtient :

$$J = \frac{\pi}{3.2^4} \left(\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 1 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \right) = \frac{35\pi}{128}.$$

PARTIE 3.

Soit n un entier naturel non nul.

Soit $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, n réels et f un élément $\mathcal{C}$, on note :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(x_k) \quad \text{avec} \quad x_k = \frac{2k+1}{2n}\,\pi.$$

On se propose de montrer qu'il existe un unique n-uplet de réels $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, tel que, pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_{n-1}$, on ait :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = S_n(P). \tag{2}$$

1.) On suppose que l'égalité (2) est satisfaite pour tout P de $\mathcal{R}_{n-1}$.

On particularise P en prenant successivement $1, X, X^2, \cdots, X^{n-1}$, on obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & \cdots & + & a_{n-1} & = & I_0 \\ a_0 x_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + & \cdots & + & a_{n-1} x_{n-1} & = & I_1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ a_0 x_0^{n-1} & + & a_1 x_1^{n-1} & + & a_2 x_2^{n-1} & + & \cdots & + & a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} & = & I_{n-1} \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est :

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde, égal à :

$$\det V = \prod_{0 \le j < i \le n-1} (x_i - x_j).$$

On a montré que :

$$\forall (i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2, \qquad i \ne j, \qquad x_i \ne x_j.$$

Donc le déterminant est non nul, le système admet une unique solution.

2.) On suppose qu'il existe des réels $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ tels que, pour tout p entier compris entre 0 et $n-1$, la relation (2) soit vérifiée par les fonctions t_p.

2.1.) La relation (2) est supposée vérifiée pour tout vecteur t_p de la base orthogonale $\left\{t_p \;\middle|\; p \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ de $\mathcal{R}_{n-1}$, par linéarité elle est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_{n-1}$.

2.2.) Si les a_k sont égaux à c, on a :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \qquad \int_{-1}^{1} \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} c t_p(x_k).$$

On particularise $p = 0$, on obtient alors :

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = cn \Longleftrightarrow c = \frac{\pi}{n}\cdot$$

De plus, on a :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \qquad \int_{-1}^{1} \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = < t_0 |\; t_p > .$$

La famille $\left\{t_p \;\middle|\; p \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ est orthogonale donc :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \qquad < t_0 |\; t_p > = 0.$$

On a montré à la question 1.4.2.) que :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0.$$

Donc :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \qquad \int_{-1}^{1} \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_p t_p(x_k) \quad \text{avec} \quad a_p = \frac{\pi}{n}\cdot$$

Le système proposé admet une unique solution, la solution :

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \cdots, \frac{\pi}{n}\right),$$

convient donc c'est la solution.

2.3.) Soit P un élément de $\mathcal{R}_{2n-1}$, on effectue la division euclidienne de P par t_n, on obtien alors ::

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2, \qquad P = Q t_n + R \quad \text{avec} \quad d^\circ R < d^\circ t_n.$$

Comme le degré de R est au plus $n-1$ et le degré de t_n est égal à n, on en déduit que :

$$d^\circ P = d^\circ(Qt_n) \Longleftrightarrow d^\circ Q = d^\circ P - d^\circ t_n \Longrightarrow d^\circ Q \leq n-1.$$

On a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{Q(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

On a montré que Q est élément de $\mathcal{R}_{n-1}$ donc :

$$\exists!(\alpha_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathbb{R}^n, \qquad Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t_k.$$

La famille $\left\{t_p \;\middle|\; p \in [\![0,n]\!]\right\}$ est orthogonale donc :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \qquad < t_k|\ t_n >= 0.$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \int_{-1}^{1} \frac{t_k(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k < t_k|\ t_n >= 0.$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Comme R est élément de $\mathcal{R}_{n-1}$, on déduit de la question précédente que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_k).$$

D'où :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_k).$$

On sait que les racines de t_n sont les réels $\Big(x_k \mid k \in [\![0,n-1]\!]\Big)$, donc :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \qquad P(x_k) = Q(x_k)t_n(x_k) + R(x_k) = R(x_k).$$

On a montré que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k).$$

Tout polynôme de $\mathcal{R}_{2n-1}$ vérifie la relation (2).

Soit g un élément de $\mathcal{C}$, on note :

$$D_n(g) = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - S_n(g) \quad \text{et} \quad ||g||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |g(x).$$

3.) Soit f un élément de $\mathcal{C}$.

3.1.) Soit P un élément de $\mathcal{R}$ de degré d, pour tout entier naturel n tel que $2n-1 \geq d$, on a P élément de $\mathcal{R}_{2n-1}$, de la question précédente, on déduit que $D_n(P) = 0$.
On a :

$$D_n(f) = D_n(f-P) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(x_k) - P(x_k)\Big).$$

D'où :

$$|D_n(f)| \leq ||f-P||_\infty\, I_0 + \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ||f-P||_\infty.$$

On sait que $I_0 = \pi$, donc :

$$|D_n(f)| \leq 2\pi\, ||f-P||_\infty.$$

3.2.) Le théorème de Stone-Weirstrass nous assure que toute fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.
La fonction f est continue sur $[-1,1]$ donc il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniforméméent vers f, soit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Big(n \geq n_0 \Longrightarrow ||f-P_n||_\infty \leq \varepsilon\Big).$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0, \qquad |D_n(f)| \leq 2\pi\varepsilon.$$

On a montré que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} D_n(f) = 0$.
Or :

$$D_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - S_n(f),$$

donc :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

4.) Pour x élément de $[-1,1]$, on prend $f(x) = \mathbf{e}^x$. Soit m un entier natruel non nul.

4.1.) La fonction exponentielle est développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence infini, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}\cdot$$

Donc la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \mathbf{e}$.

Soit k un entier supérieur ou égal à $m+1$, on a $k! = (m+1+q)!$ avec q entier naturel, d'où :

$$k! \geq (m+1)!\,(m+1)^q.$$

La somme des termes d'une suite géométrique de raison r élément de $]0,1[$ converge et :

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}\cdot$$

Donc :

$$\sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(m+1)!} \sum_{q \geq 0} \left(\frac{1}{m+1}\right)^q \quad \text{et} \quad \sum_{q \geq 0} \left(\frac{1}{m+1}\right)^q = \frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m}\cdot$$

On en déduit que :

$$\sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m \cdot m!}\cdot$$

4.2.) De la question précédente, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{e}^x = P_m(x) + \sum_{k \geq m+1} \frac{x^k}{k!} \quad \text{avec} \quad P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\cdot$$

Donc :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \left|\mathbf{e}^x - P_m(x)\right| \leq \sum_{k \geq m+1} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m \cdot m!}\cdot$$

On a montré que :

$$||f - P_m||_\infty \leq \frac{1}{m \cdot m!}\cdot$$

4.3.) De la question 3.1.) on déduit que, pour n tel que $2n-1 \geq d^\circ P_m$, on a :

$$|D_n(f)| \leq 2\pi\, ||f - P_m||_\infty \leq \frac{2\pi}{m \cdot m!}\cdot$$

Pour que $|D_n(f)|$ soit inférieur à 10^{-3}, il suffit que $\dfrac{2\pi}{m\cdot m!} \leq 10^{-3}$, soit $m = 7$.
Pour que $2n - 1 \geq 7$ il suffit de prendre $n = 4$.

On a montré que $S_4(f)$ est une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ à 10^{-3} près.

4.4.) On a :

$$S_4(f) = \frac{\pi}{4}\left(\mathbf{e}^{\cos\frac{\pi}{8}} + \mathbf{e}^{\cos\frac{3\pi}{8}} + \mathbf{e}^{\cos\frac{5\pi}{8}} + \mathbf{e}^{\cos\frac{7\pi}{8}}\right),$$

$$S_4(f) = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{ch}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{ch}\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right) \approx 3,977\ 462\ 26.$$

Une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ à 10^{-3} près est 3, 977.