CORRIGÉ CCP PSI 2002 MATH 1

PROBLÈME 1

P.1/ La série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est géométrique de raison e^{-x} donc convergente si et seulement si $-1 < e^{-x} < 1$. D'où $\boxed{D = \mathbb{R}^{+*}}$.

La série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ est à termes strictement positifs et $\dfrac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} = \dfrac{n+1}{n} e^{-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$

donc la règle de d'Alembert donne sa convergence si $x > 0$ et sa divergence si $x < 0$.

De plus $v_n(0) = n$, il y a donc divergence grossière pour $x = 0$. D'où $\boxed{D' = \mathbb{R}^{+*}}$.

P.2/ $\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \dfrac{1}{1-e^{-x}}}$.

P.3/ Donnons-nous $\varepsilon \in]0,+\infty[$.

- Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u_n' = -v_n$.
- $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $[\varepsilon,+\infty[$.
- $\forall x \in [\varepsilon,+\infty[,\quad 0 \leq \mid -v_n(x) \mid = v_n(x) \leq v_n(\varepsilon)$, ce qui donne la convergence normale donc uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n' = \sum_{n\geq 0} -v_n$ sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions s'applique : g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$ et $g' = -h$.

Ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $g' = -h$.

D'où $\boxed{h(x) = -\left[\dfrac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\right] = \dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$.

1/ Une étude de $\mathcal{A}$

1.1/ $t \mapsto e^{-xt}t$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $te^{-xt} = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto e^{-xt}t$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^M te^{-xt}dt = \left[t\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^M + \frac{1}{x}\int_0^M e^{-xt}dt = -M\frac{e^{-xM}}{x} + \frac{1}{x^2}\left(1-e^{-xM}\right) \xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{1}{x^2}$$

Donc $\boxed{F_0(x) = \dfrac{1}{x^2}}$.

1.2/ φ_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\quad \mid \varphi_x(t) \mid \leq te^{-xt}$.

D'après **1.1/** $\boxed{\varphi_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$.

1.3.1/ On a $\forall x \in I, \quad | F(x) | = | \int_{\mathbb{R}^+} e^{-xt} f(t)\, dt | \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{-xt} \ | f(t) | \, dt \leq F_0(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Donc $| xF(x) | \leq \dfrac{1}{x}$ et donc $\boxed{xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

1.3.2/ Donnons-nous $\varepsilon \in]0,+\infty[$.

- $g : (x,t) \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[\times \mathbb{R}^+$ et on a la domination
$$\forall (x,t) \in [\varepsilon,+\infty[\times \mathbb{R}^+, \quad | e^{-xt} f(t) | \leq e^{-\varepsilon t} \ | f(t) | = \varphi_\varepsilon(t)$$

par l'application φ_ε qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après **1.1/**

- g admet une dérivée partielle première par rapport à x qui est $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt} f(t)$, cette application est continue sur $[\varepsilon,+\infty[\times \mathbb{R}^+$ et vérifie la domination
$$\forall (x,t) \in [\varepsilon,+\infty[\times \mathbb{R}^+, \quad | -te^{-xt} f(t) | \leq t^2 e^{-\varepsilon t}.$$

L'application dominante $t \mapsto t^2 e^{-\varepsilon t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque
$$t^2 e^{-\varepsilon t} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On déduit du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[\varepsilon,+\infty[$ et que $\forall x \in [\varepsilon,+\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt} dt$. Ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur l'intervalle } I.}$

2/ Exemple 1 : fonction partie entière

2.1/ $f_1 = \mathrm{E}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \mathrm{E}(t) \leq t$ ce qui établit que $\boxed{f_1 \in \mathcal{A}}$.

2.1/ $F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \mathrm{E}(t) dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} e^{-xt}\, \mathrm{E}(t) dt$. Or :

$$\int_0^{N+1} e^{-xt}\, \mathrm{E}(t) dt = \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} e^{-xt}\, \mathrm{E}(t) dt = \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} e^{-xt} n dt = \sum_{n=0}^{N} \left[n \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_n^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{N} n \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{-x} = \frac{1-e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^{N} n e^{-nx}$$

On en déduit $\boxed{\forall x \in I, \quad F_1(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} h(x) = \dfrac{e^{-x}}{x(1-e^{-x})}}$.

3/ Un deuxième exemple

3.1/ f_2 est continue sur chaque intervalle $]n, n+1[$ avec n entier naturel et admet en chaque point n une limite finie à gauche et une limite finie à droite (à droite seulement si $n = 0$) :

$\lim\limits_{\substack{t \to n \\ <}} f_2(t) = (n-1) + (n-(n-1))^2 = n$, et $\lim\limits_{\substack{t \to n \\ >}} f_2(t) = n + 0 = n$.

On constate donc que ces limites sont égales, ce qui établit que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $0 \leq t - \mathrm{E}(t) < 1$ donc $0 \leq (t-\mathrm{E}(t))^2 \leq t - \mathrm{E}(t)$ et donc

$0 \leq f_2(t) \leq \mathrm{E}(t) + (t - \mathrm{E}(t)) = t$.

Finalement $\boxed{f_2 \in \mathcal{A}}$.

3.2/ La continuité de f_2 donne selon **1.3.2/** que $\boxed{F_2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur l'intervalle } I}$.

3.3/ De plus pour tout x de I, $F_2'(x) = -\int_0^{+\infty} t\, f_2(t) e^{-xt} dt \leq 0$ car $f_2 \geq 0$.

Donc $\boxed{F_2 \text{ décroît sur } I}$.

On a vu également que $xF_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\boxed{F_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe.

Enfin on a $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f_2(t) \geq t-1$ qui donne

$$F_2(x) \geq \int_0^{+\infty} e^{-xt}(t-1)dt = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{F_2(x) \xrightarrow[x\overset{>}{\to}0]{} +\infty}.$$

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe.

3.4/ On a

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-xt}\left(n + (t-n)^2\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\left(n+(t-n)^2\right) \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{-x} 2(t-n)dt \right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left[\frac{v_n(x) - v_{n+1}(x)}{x} \right] - \int_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{-x} 2(t-n)dt \right] \\
&= \frac{v_0(x)}{x} + \frac{2}{x}F_0(x) - \frac{2}{x}F_1(x) = 0 + \frac{2}{x^3} - \frac{2e^{-x}}{x^2(1-e^{-x})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_2(x) = \frac{2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x}}{x^3(1-e^{-x})}}.$$

<u>PROBLÈME 2</u>

Partie I : étude de $\mathcal{E}_1$

I.1/ $G^2 = H^2 = 0$, $GH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $HG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$G \in \mathcal{E}_1$, $H \in \mathcal{E}_1$, $GH \notin \mathcal{E}_1$ donc $\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ n'est pas stable pour la multiplication}}$.

I.2/ Les colonnes de la matrice $A_1(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonales. Pour qu'elles soient unitaires il faut et il suffit que $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 1$. Donc

$$\boxed{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}.$$

I.3/ D'après **1.2/** les matrices U envisagées s'écrivent $U = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Les matrices Δ envisagées s'écrivent $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.

On calcule alors $U\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 d_2 \\ \varepsilon_1 d_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Et on a $A_1(a_1, b_1) = U\Delta$ si et seulement si $a_1 = \varepsilon_1 d_1$ et $a_2 = \varepsilon_2 d_2$, ou encore si et seulement si $d_1 = \varepsilon_1 a_1$ et $d_2 = \varepsilon_2 a_2$. D'où exactement

$$\boxed{\text{4 décompositions possibles : } \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 a_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 a_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1}.$$

I.4.1/ $\det A = -a_1 b_1 \neq 0$ donc A est inversible. De plus $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{b_1} \\ \dfrac{1}{a_1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_1$.

I.4.2/ Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - a_1 a_2$.

- Si $a_1 b_1 < 0$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car elle n'a pas de valeur propre réelle.
- Si $a_1 b_1 > 0$ alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car elle admet 2 valeurs propres réelles distinctes : $\sqrt{a_1 a_2}, \quad -\sqrt{a_1 a_2}$.

I.4.3/ Si $a_1 b_1 = 0$ le polynôme caractéristique de A est X^2, donc la seule valeur propre est 0. Alors A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est semblable à la matrice nulle

$$\Leftrightarrow A = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 = b_1 = 0\,.$$

I.5.1/ $\det K = -xy$, $\det L = -zt$. Donc $xy \neq zt \quad \Rightarrow \quad \det K \neq \det L \quad \Rightarrow$ K et L non semblables.

I.5.2/ On suppose $xy = zt \neq 0$. Vérifions que K et L sont semblables.

La recherche d'une égalité $PKP^{-1} = L$ ou encore $PK = LP$ d'inconnue une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix}$ conduit au système $\begin{cases} -tp_2 + xp_3 = 0 \\ yp_1 - tp_4 = 0 \\ zp_1 - xp_4 = 0 \\ yp_2 - zp_3 = 0 \end{cases}$ (on peut vérifier que le rang de ce système est égal à 2).

Une solution est par exemple $P = \begin{pmatrix} 0 & t \\ x & 0 \end{pmatrix}$ ou encore $P = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ qui sont bien inversibles.

$\boxed{K \text{ et } L \text{ sont semblables}}$.

Partie II : étude de $\mathcal{E}_n$

II.1.1/ $\boxed{d_2 = 0}$.

II.1.2/

$$d_n = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -b_n \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & 0 & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad \text{(en développant par rapport à la dernière colonne)}$$

$= -\, a_n b_n d_{n-2}$ (en développant par rapport à la dernière ligne).

II.1.3/ En particulier pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $d_{2p+2} = -a_{2p+2}\, b_{2p+2}\, d_{2p}$.

Sachant que $d_2 = 0$ une récurrence immédiate donne : $\boxed{d_{2p} = 0 \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*}$.

II.1.4/ On a aussi pour $p \in \mathbb{N}^*$: $d_{2p+1} = -a_{2p+1}\, b_{2p+1}\, d_{2p-1}$. Donc $d_{2p+1} = d_1 \prod_{k=1}^{p} \left(-a_{2k+1} b_{2k+1}\right)$.

Et comme $d_1 = -a_1 b_1$ on obtient $\boxed{d_{2p+1} = (-1)^{p+1} \prod_{k=0}^{p} \left(a_{2k+1} b_{2k+1}\right)}$.

II.2.1/ Supposons $U = A_n(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & & 0 \\ u_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & v_n \\ 0 & & u_n & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & d_{n+1} \end{pmatrix}$.

Alors $U\Delta = \begin{pmatrix} 0 & v_1 d_2 & & 0 \\ u_1 d_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & v_n d_{n+1} \\ 0 & & u_n d_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n$.

De plus ${}^t\!AA = {}^t(U\Delta)(U\Delta) = {}^t\Delta\, {}^tUU\Delta = {}^t\Delta\Delta = \Delta^2$ qui est diagonale.

II.2.2/ $U \in \mathcal{E}_{2p} \Rightarrow \det U = 0$ d'après **II.1.3/**, ce qui empêche U d'être orthogonale.

Autrement dit $\mathcal{E}_{2p} \cap \mathcal{O}_{2p+1}$ est vide !

II.2.3/ La réponse est non.

On peut par exemple observer qu'une matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & v_2 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si elle est de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$

(écrire que la première et la quatrième colonnes sont unitaires, puis que la deuxième et la troisième lignes sont unitaires, enfin que la deuxième et la troisième colonnes sont unitaires).

Alors si $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$ on a $U\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \pm d_2 & 0 & 0 \\ \pm d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm d_4 \\ 0 & 0 & \pm d_3 & 0 \end{pmatrix} \neq A_3\left((1,3,5),(2,4,6)\right)$.

On pouvait aussi remarquer que si $A = A_3\left((1,3,5),(2,4,6)\right)$, alors ${}^tAA$ n'est pas diagonale et conclure avec **II.2.1**/.

II.2.4.1/En écrivant que la première colonne est unitaire on obtient $a_1 = \pm 1$, puis en écrivant que la deuxième ligne est unitaire : $b_2 = 0$.

En écrivant que la première ligne est unitaire on obtient $b_1 = \pm 1$, puis en écrivant que la deuxième colonne est unitaire : $a_2 = 0$.

II.2.4.2/En utilisant le fait que les lignes et les colonnes sont unitaires on montre (par récurrence) que $\forall k \in [\![0, p]\!],\quad a_{2k+1} = \pm 1$ et $b_{2k+1} = \pm 1$ et $\forall k \in [\![1, p]\!],\quad a_{2k} = 0$ et $b_{2k} = 0$.

Réciproquement les matrices obtenues sont bien orthogonales.

On en déduit $\boxed{\mathrm{card}\left(\mathcal{E}_{2p+1} \cap \mathcal{O}_{2p+2}\right) = 2^{2(p+1)} = 4^{p+1}}$.

II.2.4.3/Effectuons le produit

$$
{}^tAA=\begin{pmatrix}
0 & a_1 & 0 & & & & & \\
b_1 & 0 & a_2 & & & & & \\
0 & b_2 & 0 & a_3 & & & & \\
 & 0 & b_3 & 0 & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & 0 & a_{n-1} & 0 \\
 & & & & b_{n-1} & 0 & a_n \\
 & & & & 0 & b_n & 0
\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}
0 & b_1 & 0 & & & & & \\
a_1 & 0 & b_2 & & & & & \\
0 & a_2 & 0 & b_3 & & & & \\
 & 0 & a_3 & 0 & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & 0 & b_{n-1} & 0 \\
 & & & & a_{n-1} & 0 & b_n \\
 & & & & 0 & a_n & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_1^2 & 0 & a_1b_2 & & & & & \\
0 & b_1^2+a_2^2 & 0 & a_2b_3 & & & & \\
a_1b_2 & 0 & b_2^2+a_3^2 & 0 & a_3b_4 & & & \\
 & a_2b_3 & 0 & \ddots & & \ddots & & \\
 & & a_3b_4 & & \ddots & 0 & a_{n-2}b_{n-1} & \\
 & & & \ddots & & b_{n-2}^2+a_{n-1}^2 & 0 & a_{n-1}b_n \\
 & & & & a_{n-2}b_{n-1} & 0 & b_{n-1}^2+a_n^2 & 0 \\
 & & & & & a_{n-1}b_n & 0 & b_n^2
\end{pmatrix}
$$

En écrivant que cette matrice est diagonale on a en particulier $\forall j\in[\![1,n-1]\!],\quad a_jb_{j+1}=0$.

Or $\det A=(-1)^{p+1}\prod_{k=0}^{p}\left(a_{2k+1}b_{2k+1}\right)\neq 0$ donc les a_{2k+1} et les b_{2k+1} sont non nuls. On en déduit que les a_{2k} et les b_{2k} sont nuls.

Il reste $A=\begin{pmatrix}
0 & b_1 & & & & & \\
a_1 & 0 & 0 & & & & \\
 & 0 & 0 & b_3 & & & \\
 & & a_3 & 0 & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & 0 & \\
 & & & & 0 & 0 & b_{2p+1} \\
 & & & & & a_{2p+1} & 0
\end{pmatrix}$ que l'on peut décomposer par exemple

en $A=\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & & & & \\
 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & 0 & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & 1 & 0
\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}
a_1 & & & & & & & \\
 & b_1 & & & & & & \\
 & & a_2 & & & & & \\
 & & & b_2 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & a_{2p+1} & \\
 & & & & & & & b_{2p+1}
\end{pmatrix}$.

II.3.1/ A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. De plus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = \operatorname{tr} A = 0$.

II.3.2/ Raisonnons par l'absurde en supposant que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit λ une valeur propre de f_A et x un vecteur propre associé. Alors

$\varphi(x,x) = < x \quad , \quad f_A(x) > = < x \quad , \quad \lambda x > = \lambda \,||\, x \,||^2$ donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x,x)}{||\, x\,||^2} > 0$.

Cela empêcherait la somme des valeurs propres d'être nulle.

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ n'est pas un produit scalaire sur } \mathbb{R}^{n+1}.}$

II.4.1/ Si $A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_1$.

II.4.2/ Si $A \in \mathcal{O}_{n+1}$ alors $A^* = (\det A)A^{-1} = (\det A)\,{}^t A$.

Si de plus $A = A_n(a,b)$ on en déduit facilement que $A^* = A_n((\det A)b, (\det A)a)$.

$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{E}_n \cap \mathcal{O}_{n+1} \text{ alors } A^* \in \mathcal{E}_n.}$

(Comme $\det A = \pm 1$ on aura même $A^* \in \mathcal{E}_n \cap \mathcal{O}_{n+1}$).

On pouvait aussi exploiter l'étude de $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{O}_{n+1}$ faite en **II.2**/.

II.4.3/ La réponse est non. En effet, soit un entier $n \geq 2$.

Le choix $a = (1,\ldots,1), \quad b = (0,\ldots,0)$ donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le dernier élément de la première colonne de A^* est $(-1)^{n+2}$, donc $A^* \notin \mathcal{E}_n$.