Correction de l'épreuve CCP 2001 PSI – Maths 2

PREMIÈRE PARTIE

I-1.1. Soit t au voisinage de 0, $t \neq 0$. Alors $\dfrac{\varphi(t)}{t^s} = \dfrac{\varphi(t)}{(\rho t)^s} \cdot \rho^s$.

Par hypothèse, la fonction $\dfrac{\varphi(t)}{(\rho t)^s}$ est lorsque $t \longrightarrow 0$, il en est donc de même de $\dfrac{\varphi(t)}{(\rho t)^s} \cdot \rho^s$ car ρ^s est une constante.

Conclusion : $\boxed{\varphi(t) = O(t^s) \text{ lorsque } t \longrightarrow 0.}$

I-1.2. Soit t au voisinage de 0, $t \neq 0$. Alors $\dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}} = \dfrac{\varphi(t)}{t^k} \cdot t$. C'est le produit d'une fonction bornée au voisinage de 0 par une fonction tendant vers 0, et par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}} = 0.}$

I-2.1. Par hypothèse, pour $t \longrightarrow 0$, on a $A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k + t^{k+1}\varphi(t)$ avec φ une fonction bornée au voisinage de 0.

Par suite, il vient $\lim\limits_{t \to 0} t^{k+1}\varphi(t) = 0$, et donc $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} A(t) = a_0.}$

I-2.2. Soit t au voisinage de 0. Alors :

$$A_1(t) = \frac{rA_0(t) - A_0(rt)}{r-1} = \frac{r\big(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + O(t^{k+1})\big) - \big(a_0 + a_1 rt + a_2 r^2 t^2 + \cdots + O((rt)^{k+1})\big)}{r-1}$$

$$= a_0 + \frac{r - r^2}{r-1} a_2 t^2 + O(t^{k+1})$$

car d'après **I-1.1**, $O\big((rt)^{k+1}\big) = O(t^{k+1})$.

On en déduit : $\boxed{A_1(t) = a_0 - ra_2 t^2 + \cdots + O(t^{k+1}).}$

En posant $\boxed{a_{1,2} = -ra_2}$, on a donc le résultat souhaité.

I-2.3. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété pour $n \in \{1, \dots, k\}$: « pour $t \longrightarrow 0$, $A_n(t) = a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + a_{n,n+2} t^{n+2} + \cdots + O(t^{k+1})$ »

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \{1, \dots, k-1\}$ fixé.

Alors pour $t \longrightarrow 0$,

$$A_{n+1}(t) = \frac{r^{n+1} A_n(t) - A_n(rt)}{r^{n+1} - 1}$$

$$= \frac{r^{n+1}\Big(a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + a_{n,n+2} t^{n+2} + \cdots + O(t^{k+1})\Big) - \Big(a_0 + a_{n,n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n,n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \cdots + O((rt)^{k+1})\Big)}{r^{n+1} - 1}$$

On observe que le terme en t^{n+1} s'élimine, et qu'il restera une expression de la forme $a_0 + a_{n+1,n+2} t^{n+2} + \cdots + O(t^{k+1})$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$\boxed{\text{le développement limité de } A_n \text{ à l'ordre } k \text{ au voisinage de 0 est de la forme } A_n(t) = a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + \cdots + O(t^k).}$

I-2.4. On a : $\lim\limits_{m \to +\infty} r^{-m} t_0 = 0$ car $r > 1$.

Vu que $\lim\limits_{t \to 0} A(t) = a_0$, par composition de limites on a donc $\boxed{\lim\limits_{m \to +\infty} A(r^{-m} t_0) = a_0.}$

I-3.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors $A_{p,0} = A(r^{-p} t_0)$.

Or, pour t au voisinage de 0, le développement limité de A_0 à l'ordre 0 est $A(t) = a_0 + O(t)$.

Par suite, vu que $\lim\limits_{p \to +\infty} r^{-p} t_0 = 0$, on a $A(r^{-p} t_0) = a_0 + O(r^{-p} t_0)$.

D'après **I-1.1**, t_0 étant une constante, on a bien $\boxed{A_{p,0} = a_0 + O(r^{-p}).}$

I-3.2. Soit $q \in \mathbb{N}$. Alors d'après **I-2.3**, pour $t \longrightarrow 0$, $A_q(t) = a_0 + O(t^{q+1})$.

Par suite, pour $p \longrightarrow +\infty$ et $q \in \{0, \dots, p\}$, $A_{p,q} = A_q(r^{-p}t_0) = a_0 + O(r^{-p(q+1)}t_0^{q+1})$, d'où $\boxed{A_{p,q} = a_0 + O(r^{-p(q+1)}).}$

On obtient donc $\boxed{\alpha(p,q) = p(q+1).}$

I-3.3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Alors $A_{p,1} = A_1(r^{-p}t_0) = \dfrac{rA(r^{-p}t_0) - A(r \cdot r^{-p}t_0)}{r-1} = \dfrac{rA(r^{-p}t_0) - A(r^{-(p-1)}t_0)}{r-1}$

On a donc bien $\boxed{A_{p,1} = \dfrac{rA_{p,0} - A_{p-1,0}}{r-1}.}$

I-3.4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $q \in \{1, \dots, p\}$.

Alors $A_{p,q} = A_q(r^{-p}t_0) = \dfrac{r^q A_{q-1}(r^{-p}t_0) - A_{q-1}(r \cdot r^{-p}t_0)}{r^q - 1} = \dfrac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1}.$

De plus, $\dfrac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = \dfrac{(r^q - 1 + 1)A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \dfrac{1}{r^q - 1}(A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}).$

On obtient donc bien $\boxed{A_{p,q} = \dfrac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \dfrac{1}{r^q - 1}(A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}).}$

I-4. Pour $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant m$, on a vu que $\alpha(p,q) = p(q+1)$, donc $\alpha(p,q)$ est maximum pour $q = p = m$ et minimum pour $p = q = 0$.

$\boxed{\text{La plus grande valeur de } \alpha(p,q) \text{ est } m(m+1), \text{ la plus petite valeur est } 0.}$

D'après **I-1.2**, plus la puissance de t est grande dans $O(t^k)$, plus ce terme est petit quand $t \longrightarrow 0$.

On peut donc attendre à priori la meilleure approximation de a_0 par $A_{p,q}$ lorsque $A_{p,q} = a_0 + O(r^{-\alpha(p,q)})$ sera tel que $\alpha(p,q)$ soit le plus grand possible, donc il s'agit de la valeur $A_{m,m}$, avec $\boxed{A_{m,m} = a_0 + O(r^{-\sigma(m)}), \text{ et } \sigma(m) = m(m+1).}$

I-5.1. D'après la formule de Taylor-Young, et par unicité des coefficients d'un développement limité, on a :

$\boxed{\forall p \in \{0, \dots, 2k\},\ c_p = \dfrac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}.}$

I-5.2. • Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Alors $G(-h) = \dfrac{g(\alpha - h) - g(\alpha + h)}{-2h} = \dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha - h)}{2h} = G(h)$.

$\boxed{G \text{ est donc paire.}}$

• D'après Taylor-Young, on a pour $h \longrightarrow 0$: $g(\alpha + h) = g(\alpha) + hg'(\alpha) + o(h)$.

On en déduit, pour $h \longrightarrow 0$: $G(h) = \dfrac{\big[g(\alpha) + hg'(\alpha) + o(h)\big] - \big[g(\alpha) - hg'(\alpha) + o(h)\big]}{2h} = g'(\alpha) + o(1)$

Par suite, $\lim\limits_{h \to 0} G(h) = g'(\alpha)$, donc $\boxed{G \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ par la valeur } g'(\alpha).}$

I-5.3. Soit h au voisinage de 0. Alors :

$$\widetilde{G}(h) = \frac{g(\alpha + h) - g(\alpha - h)}{2h}$$

$$= \frac{\big[c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_{2k-1}h^{2k-1} + c_{2k}h^{2k} + O(h^{2k+1})\big] - \big[c_0 - c_1 h + c_2 h^2 + \cdots - c_{2k-1}h^{2k-1} + c_{2k}h^{2k} + O(h^{2k+1})\big]}{2h}$$

On obtient donc : $\boxed{\widetilde{G}(h) = c_1 + c_3 h^2 + c_5 h^4 + \cdots + c_{2k-1}h^{2k-2} + O(h^{2k}).}$

I-6.1. Posons $r = 4$ et $t_0 = h^2$. Alors on a $r > 1$, et pour $p \in \{0, \dots, m\}$, $A(r^{-p}t_0) = A(4^{-p}h^2) = \widetilde{G}(\sqrt{4^{-p}h^2}) = G\left(\dfrac{h}{2^p}\right)\cdot$

$\boxed{\text{Le choix } r = 4 \text{ et } t_0 = h^2 \text{ répond donc à la question.}}$

I-6.2. Pour t au voisinage de 0^+, on a $A(t) = \widetilde{G}(\sqrt{t}) = c_1 + c_3 t + c_5 t^2 + \cdots + c_{2k-1}t^{k-1} + O(t^k)$ d'après **I-5.3**.

D'après **I-3.1**, on a $\lim\limits_{p \to +\infty} A_{p,0} = c_1$.

D'après **I-5.2**, on a finalement $\boxed{\lim_{p\to+\infty} A_{p,0} = \ell = g'(\alpha).}$

I-7.1. Pour $t > 0$, on a ici $A(t) = \dfrac{\ln(3+\sqrt{t}) - \ln(3-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$

On trouve alors : $A_{0,0} \sim 0.3415898164800$, $A_{1,0} \sim 0.3353299832433$, $A_{2,0} \sim 0.3338284815613$, $A_{3,0} \sim 0.3334568724934$.

On obtient ensuite le tableau :

$A_{0,0} \sim 0.3415898164800$			
$A_{1,0} \sim 0.3353299832433$	$A_{1,1} \sim 0.3332433721645$		
$A_{2,0} \sim 0.3338284815613$	$A_{2,1} \sim 0.3333279810006$	$A_{2,2} \sim 0.3333336215897$	
$A_{3,0} \sim 0.3334568724934$	$A_{3,1} \sim 0.3333330028040$	$A_{3,2} \sim 0.3333333375909$	$A_{3,3} \sim 0.3333333330830$

<u>Remarque :</u> le programme MAPLE utilisé pour obtenir ce résultat est le suivant :

```
# Initialisations
G:=t->(ln(3+t)-ln(3-t))/2/t; h:=0.8;
for p from 0 to 3 do A[p,0]:=G(h/2^p); od;

# Calcul des termes
for p from 1 to 3 do
  for q from 1 to p do
    A[p,q]:=(r^q*A[p,q-1]-A[p-1,q-1])/(r^q-1);
  od;
od;

# Affichage
for p from 0 to 3 do
  for q from 0 to p do
    printf(`0.15%f  `,A[p,q]);
  od;
  printf(`\n`);
od;
```

I-7.2. On a $\ell = g'(\alpha)$, donc dans l'exemple étudié on trouve $\boxed{\ell = \frac{1}{3}\cdot}$

On voit clairement dans le tableau que la meilleure approximation est obtenue pour $A_{3,3}$, ce qui correspond bien à la valeur trouvée au **I-4**.

DEUXIÈME PARTIE

II-1.1. • B_1 est tel que $B_1' = B_0$, d'où $B_1 = X + c$ ($c \in \mathbb{R}$), et $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t+c)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^2}{2} + ct\Big]_0^1 = \frac{1}{2} + c$, d'où $c = -\dfrac{1}{2}\cdot$

On a donc $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}\cdot}$

• De même, $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$, d'où $B_2 = X^2 - X + c$ ($c \in \mathbb{R}$), et $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + ct\Big]_0^1 = -\frac{1}{6} + c$, d'où $c = \dfrac{1}{6}\cdot$

On a donc $\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}\cdot}$

• Enfin, $B_3' = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \dfrac{1}{2}$, d'où $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + c$ ($c \in \mathbb{R}$), et $\displaystyle\int_0^1 B_3(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^4}{4} - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + ct\Big]_0^1 = c$,

d'où $c = 0$. On a donc $\boxed{B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.}$

II-1.2. On trouve à partir des expressions précédentes : $\boxed{b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{6} \text{ et } b_3 = 0.}$

De même, $\boxed{B_0(1) = 1,\ B_1(1) = \frac{1}{2},\ B_2(1) = \frac{1}{6} \text{ et } B_3(1) = 0.}$

On observe donc que $b_p = B_p(1)$ pour $p \in \{0, 2, 3\}$.

II-1.3. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Alors $\int_0^1 B_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $\int_0^1 \frac{B_p'(t)}{p}\,\mathrm{d}t = 0$, d'où $\left[\frac{B_p(t)}{p}\right]_0^1 = \frac{B_p(1) - B_p(0)}{p} = 0$, et donc $\boxed{b_p = B_p(1).}$

II-2.1.

- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\widetilde{B}_0(t) = (-1)^0 B_0(1) = 1$ donc $\big(\widetilde{B}_p\big)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie (i).
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\widetilde{B}_p'(t) = (-1)^p \cdot \big(-B_p'(1-t)\big) = (-1)^{p-1} p B_{p-1}(1-t) = p\widetilde{B}_{p-1}(t)$.

  De plus, $\int_0^1 \widetilde{B}_p(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^p \int_0^1 B_p(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^p \int_1^0 B_p(u)(-\,\mathrm{d}u)$ en effectuant le changement de variable $u = 1-t$.

  On en déduit $\int_0^1 \widetilde{B}_p(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et donc $\big(\widetilde{B}_p\big)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie (ii).

Les relations (i) et (ii) définissant clairement de manière unique la suite $\big(B_p\big)_{p\in\mathbb{N}}$, on a donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \widetilde{B}p = B_p.}$

II-2.2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $b_{2p+1} = B_{2p+1}(0) = -\widetilde{B}_{2p+1}(1)$.

D'après **I-1.3**, on a de plus $b_{2p+1} = B_{2p+1}(1)$ d'où d'après **I-2.1** : $b_{2p+1} = \widetilde{B}_{2p+1}(1)$.

On obtient donc clairement : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ b_{2p+1} = 0.}$

II-3.1. On a $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 B_0(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 B_1'(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ par définition de B_0 et B_1.

En intégrant par parties, on obtient donc : $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[B_1(t)f(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 B_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Vu que $B_1 = X - \frac{1}{2}$, on obtient : $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 B_0(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) - \int_0^1 B_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.}$

II-3.2. • La démonstration précédente prouve que la formule est vraie pour $n = 1$.

• Supposons la formule établie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=2}^{n} (-1)^p \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=2}^{n} (-1)^p \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_{n+1}'(t)}{(n+1)\cdot n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On intègre par partie l'intégrale située à droite de la formule :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{B_{n+1}'(t)}{(n+1)\cdot n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{B_{n+1}(t)}{(n+1)!} f^{(n)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{n+1}(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b_{n+1}}{(n+1)!}\big(f^{(n)}(1) - f^{(n)}(0)\big) - \int_0^1 \frac{B_{n+1}(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

car $b_{n+1} = B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$ d'après **I-1.2**.

En reportant cette expression dans la formule précédente, on obtient la formule demandée au rang $n+1$, d'où :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=2}^{n} (-1)^p \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

II-3.3. Soit $n \geqslant 2$, de la forme $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après **II-2.2**, tous les termes de la somme correspondant à un indice p impair sont nuls, il reste donc en réindexant la somme : $\boxed{\dfrac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(1)-f^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^1\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.}$

II-4.1. • Soit $t\in\mathbb{R}$, notons $n=E(t)$. Alors $n\leqslant t<n+1$, d'où $n+1\leqslant t<n+2$ et donc $E(t+1)=n+1$. Par suite, $\mathcal{D}_p(t+1)=B_p(t+1-n-1)=B_p(t-n)=\mathcal{D}_p(t)$ et donc $\boxed{\mathcal{D}_p \text{ est périodique de période } 1.}$

• Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Considérons la subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que $[a,b]\cap\mathbb{N}=\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$.

Alors pour $i\in\{0,\dots,n-1\}$, $\forall t\in\,]x_i,x_{i+1}[$, $f_{\big|]x_i,x_{i+1}[}(t)=B_p(t-x_i)$ par définition.

L'application $f_{\big|]x_i,x_{i+1}[}$ est donc clairement prolongeable à $[x_i,x_{i+1}]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_i,x_{i+1}]$, qui n'est autre que $t\longmapsto B_p(t-x_i)$, et par suite $\boxed{\mathcal{D}_p \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ par morceaux sur } R.}$

II-4.2. • Soit $q\in\{1,\dots,N\}$. Alors $\boxed{f_q \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1] \text{ comme composée de telles applications.}}$

• Soit $m\in\mathbb{N}$. On a clairement $\forall t\in[0,1]$, $f_1(t)=f(t)$, d'où $\boxed{f_1^{(m)}(0)=f^{(m)}(0).}$

• Soit $m\in\mathbb{N}$, soit $q\in\{2,\dots,N\}$.

Alors clairement $\forall t\in[0,1]$, $f_q^{(m)}(t)=f^{(m)}(t+q-1)$, d'où $f_q^{(m)}(0)=f^{(m)}(q-1)=f^{(m)}(1+q-1+1)$ et donc $\boxed{f_q^{(m)}(0)=f_{q-1}^{(m)}(1).}$

• De même, pour $m\in\mathbb{N}$, $f_N^{(m)}(1)=f^{(m)}(1+N-1)$ et donc $\boxed{f_N^{(m)}(1)=f^{(m)}(N).}$

II-4.3. Soit $q\in\{1,\dots,N\}$. Alors la formule (1) appliquée à f_q fournit :

$$\frac{1}{2}\big(f_q(0)+f_q(1)\big)=\int_0^1 f_q(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f_q^{(2p-1)}(1)-f_q^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^1\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}f_q^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Compte tenu de la définition de f_q et de **II-4.2**, on obtient donc :

$$\frac{1}{2}\big(f(q-1)+f(q)\big)=\int_{q-1}^{q} f(u)\,\mathrm{d}u+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(q)-f^{(2p-1)}(q-1)\big)-\int_{q-1}^{q}\frac{B_{2k}(u-q+1)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

(on a effectué le changement de variable $u=t+q-1$ dans chacune des deux intégrales)

Pour tout $t\in[q-1,q[$, on a de plus $E(t)=q-1$, d'où $\forall t\in[q-1,q[$, $B_{2k}(t-q+1)=\mathcal{D}_{2k}(t)$.

Écrivons alors chacune de ces formules pour $1\leqslant q\leqslant N$:

$$\frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(1)-f^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^1\frac{\mathcal{D}_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}\big(f(1)+f(2)\big)=\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(2)-f^{(2p-1)}(1)\big)-\int_1^2\frac{\mathcal{D}_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$\frac{1}{2}\big(f(N-1)+f(N)\big)=\int_{N-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(N)-f^{(2p-1)}(N-1)\big)-\int_{N-1}^{N}\frac{\mathcal{D}_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t$$

En additionnant toutes ces relations, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient bien :

$$\boxed{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{q=1}^{N-1}f(q)+\frac{1}{2}f(N)=\int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(N)-f^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^N\frac{\mathcal{D}_{2k}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

TROISIÈME PARTIE

III-1. g est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,N]$ comme composée de telles fonctions. De plus, par récurrence immédiate, on a : $\boxed{\forall m\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,N],\ g^{(m)}(t)=h^m f^{(m)}(a+th).}$

Appliquons alors la formule (2) à g :

$$\frac{1}{2}g(0)+\sum_{q=1}^{N-1}g(q)+\frac{1}{2}g(N)=\int_0^N g(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(g^{(2p-1)}(N)-g^{(2p-1)}(0)\big)-\int_0^N\frac{\mathcal{D}_{2k}(t)}{(2k)!}g^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On exploite alors la formule donnant les dérivées successives de g, et on multiplie le tout par h :

$$h\left[\frac{1}{2}f(a)+\sum_{q=1}^{N-1}f(a+qh)+\frac{1}{2}f(b)\right]=h\int_0^N f(a+th)\,\mathrm{d}t+h\sum_{p=1}^{k}h^{2p-1}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\big)-$$

$$h\int_0^N\frac{\mathcal{D}_{2k}(t)}{(2k)!}h^{2k}f^{(2k)}(a+ht)\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît dans le membre de gauche le terme $T_f(h)$, et on effectue dans chaque intégrale du membre de droite le changement de variable $u=a+th,\ \mathrm{d}u=h\,\mathrm{d}t$, on obtient bien ainsi :

$$\boxed{T_f(h)=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u+\sum_{p=1}^{k}h^{2p}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\big)-h^{2k}\int_a^b\frac{\mathcal{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u}$$

III-2. L'application B_{2k} est continue sur $[0,1]$ qui est compact, donc est bornée sur $[0,1]$.

Par suite, $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall t\in[0,1]$, $\big|B_{2k}(t)\big|\leqslant M$.

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t-E(t)\in[0,1]$, donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\big|\mathcal{D}_{2k}(t)\big|\leqslant M$.

On en déduit $\left|\displaystyle\int_a^b\frac{\mathcal{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant\displaystyle\int_a^b\frac{\left|\mathcal{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)\right|}{(2k)!}\cdot\big|f^{(2k)}(u)\big|\,\mathrm{d}u\leqslant\underbrace{\frac{M}{(2k)!}\int_a^b\big|f^{(2k)}(u)\big|\,\mathrm{d}u}_{\text{constante indépendante de }h}$.

On a donc $h^{2k}\displaystyle\int_a^b\frac{\mathcal{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u=O(h^{2k})$.

En posant, pour $p\in\{1,\dots,k\}$, $d_p=\dfrac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\big)$, on obtient donc bien :

$$\boxed{T_f(h)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k-1}d_p h^{2p}+O(h^{2k}).}$$

III-3.1. D'après **III-2** et **I-2.1**, on a clairement $\boxed{\lim\limits_{t\to0}A(t)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$

III-3.2. On est dans un cas similaire à celui étudié au **I-6.1**, la fonction T_f jouant le rôle de $\widetilde{G}$. On obtient donc de la même façon $\boxed{r=4\text{ et }t_0=h^2.}$

III-4.1. Pour $p\in\mathbb{N}$, on a d'après ce qui précède : $A_{p,0}=A(r^{-p}t_0)=T_f\left(\dfrac{h}{2^p}\right)$ et donc $\boxed{A_{p,0}=T_f(h_p).}$

On obtient donc, pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{A_{p-1,0}=T_f(h_{p-1})=T_f(2h_p).}$

III-4.2. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Alors $A_{p,0}=T_f(h_p)=h_p\left[\dfrac{1}{2}f(a)+\displaystyle\sum_{q=1}^{2^p-1}f(a+qh_p)+\dfrac{1}{2}f(b)\right]$.

On décompose la somme en deux : d'un côté les indices q pairs ($q=2r$ avec $1\leqslant r\leqslant 2^{p-1}-1$), de l'autre les indices q impairs ($q=2r+1$ avec $0\leqslant r\leqslant 2^{p-1}-1$) :

$$A_{p,0} = h_p \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{r=1}^{2^{p-1}-1} f(a+2rh_p) + \sum_{r=0}^{2^{p-1}-1} f(a+(2r+1)h_p) + \frac{1}{2} f(b) \right].$$

On remarque que, dans la première somme, chaque terme $f(a+2rh_p)$ est égal à $f(a+rh_{p-1})$, et de plus la deuxième somme est égale à $\dfrac{A'_{p,0}}{h^p}\cdot$

On a donc finalement : $\boxed{A_{p,0} = \dfrac{1}{2} A_{p-1,0} + A'_{p,0}.}$

L'intérêt de cette formule est de permettre le calcul de $A_{p,0}$ en réutilisant la valeur de $A_{p-1,0}$, donc en économisant une partie des calculs. Plus précisément, l'application directe (1) de la formule initiale donnant $A_{p,0}$ oblige à calculer $2^p - 1$ termes de la forme $f(a+qh_p)$, alors que $A'_{p,0}$ ne fournit que 2^{p-1} tels termes. Le nombre de termes à calculer est donc divisé par deux. (2)

III-5.1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. La formule de Taylor, reste intégral fournit pour la fonction $x \longmapsto \sin x$ sur l'intervalle $[0,t]$:

$$\sin t = t \int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}x$$

Par suite, on a $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}x$, et on remarque que cette formule reste valable pour $t=0$.

L'application $\begin{array}{ccc} [0,1]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \cos(xt) \end{array}$ étant clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, d'après le théorème relatif à la dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit que $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big).}$

III-5.2. On calcule les sept valeurs dans l'ordre suivant : $A_{0,0}$, $A'_{1,0}$, $A_{1,0}$, $A'_{2,0}$, $A_{2,0}$, $A'_{3,0}$ et $A_{3,0}$.

En effet, la formule du **III-4.2** ($A_{p,0} = \dfrac{1}{2} A_{p-1,0} + A'_{p,0}$) permet d'accélérer les calculs.

On obtient ainsi : $\boxed{A_{0,0} \sim 1.570\,;\ A_{1,0} \sim 1,785\,;\ A_{2,1} \sim 1,835\,;\ A_{3,0} \sim 1,847 \text{ et } A'_{1,0} = 1\,;\ A'_{2,0} \sim 0,942\,;\ A'_{3,0} \sim 0.930}$

III-5.3. On obtient les valeurs suivantes :

$A_{0,0} \sim 1,570796327$			
$A_{1,0} \sim 1,785398163$	$A_{1,1} \sim 1,856932109$		
$A_{2,0} \sim 1,835508123$	$A_{2,1} \sim 1,852211443$	$A_{2,2} \sim 1,851896732$	
$A_{3,0} \sim 1,847842307$	$A_{3,1} \sim 1,851953701$	$A_{3,2} \sim 1,851936518$	$A_{3,3} \sim 1,85193715$

De même qu'au **I-7.2**, $\boxed{\text{la meilleure approximation est } \textit{à priori } A_{3,3}.}$ (3)

III-6. Si la fonction f est périodique de période $b-a$, alors il en est de même de chacune de ses dérivées successives, et donc la formule (4) s'écrit : $T_f(h) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + O(h^{2k})$. Le procédé d'extrapolation de Richardson ayant pour but de « supprimer » les termes de la forme $a_p h^p$ apparaissant dans le développement limité, il est donc inutile de l'appliquer ici. Plus précisément, on obtiendra, pour $1 \leqslant q \leqslant p$: $A_{p,q} = A_{p,0}$. En bref, la méthode est dans ce cas un moyen assez sophistiqué de consommer de la mémoire et du temps de calcul informatique… (4)

★ ★ ★ FIN ★ ★ ★

(1) Meuh !!

(2) Cette formule sera donc particulièrement intéressante dans un contexte informatique.

(3) Maple trouve l'approximation : 1,851937052. Nous avons donc 6 décimales justes, ce qui n'est pas mal.

(4) Mais dans le style, Windows NT fait beaucoup mieux !