



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

## MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99 – BOEN n°42 du 25.11.99.*

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

## PROBLÈME 1

Étant donné une série convergente  $\sum_{k \geq 0} u_k(x)$ , on note  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$  son reste d'ordre  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et on se propose d'étudier la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ .

## PARTIE I

I.1. On suppose que  $u_k(x) = (-1)^k x^k$ , où  $x \in \mathbb{R}$ .

I.1.1. Déterminer l'ensemble  $I$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que la série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k$  converge et préciser sa somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$  pour  $x \in I$ .

I.1.2. En supposant que  $x \in I$ , expliciter  $R_n(x)$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  converge et calculer sa somme  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ .

**I.2.** On conserve les notations du I.1 :

$u_k(x) = (-1)^k x^k$ ,  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^k$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et on pose  $R_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ . On considère par ailleurs la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  et on pose :  $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On se propose d'établir la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} r_n$  et de calculer sa somme.

**I.2.1.** Justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  et par suite l'existence de  $r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**I.2.2.** Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  avec  $n \leq m$  et  $I_0 = [0, 1[$ .

**I.2.2.1.** En remarquant que  $\sum_{k=n}^m (-1)^k x^k = R_{n-1}(x) - R_m(x)$ , montrer que pour tout  $x \in I_0$  on a

l'inégalité : 
$$\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right| \leq 2.$$

**I.2.2.2.** L'entier  $n$  étant fixé, déduire en particulier de I.2.2.1 que :

$$\int_{I_0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m \int_{I_0} (-1)^k x^k dx$$

et par suite que  $r_n = \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$ .

**I.2.2.3.** Retrouver ainsi la valeur (bien connue !) de  $r_0$ .

**I.2.2.4.** Montrer que pour tout couple  $(m, x) \in \mathbb{N} \times I_0$  on a l'inégalité :

$$\left| \sum_{n=0}^m R_{n-1}(x) \right| \leq 2.$$

**I.2.2.5.** Déduire en particulier de I.2.2.4 que la somme  $\sum_{n=0}^m \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$  admet une limite lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} r_n$  converge et calculer sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ .

## PARTIE II

### Une égalité sur les restes ; quelques applications.

#### II.1. Egalité sur les restes.

Lorsque la série numérique  $\sum_{k \geq 1} u_k$  converge, on note toujours  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  son reste d'ordre  $n$ .

Soit  $\sum_{k \geq 1} u_k$  une série convergente ; exprimer pour  $n \in \mathbb{N}$  la différence  $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$  en fonction de  $n$  et de  $R_n$ .

#### II.2. Application à une suite.

Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\sum_{k=1}^n (n-k) \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \alpha n + \beta + o(1)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### II.3. Application à une série à termes positifs.

On suppose de plus que  $u_k \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

II.3.1. Montrer que la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} R_k$  entraîne la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} k u_k$ .

II.3.2. On suppose que la série  $\sum_{k \geq 1} k u_k$  est convergente. Quelle est la limite de la suite  $(n+1)R_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

II.3.3. Dédurre de ce qui précède que les deux séries  $\sum_{k \geq 0} R_k$  et  $\sum_{k \geq 1} k u_k$  sont de même nature et lorsqu'elles convergent comparer alors leurs sommes  $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$ .

#### II.4. Application à la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$ .

On suppose maintenant que  $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in D = ]1, +\infty[$ .

On note toujours  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$  le reste d'ordre  $n$  et on pose  $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$  pour  $x \in D$ .

Préciser l'ensemble  $D_1$  des  $x \in D$  tels que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  soit convergente et exprimer,

pour  $x \in D_1$ , la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$  à l'aide de la fonction  $\zeta$ .

### II.5. Application à une série entière.

On suppose maintenant que  $u_k(x) = a_k x^k$ , où  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite de nombres réels et où  $x \in \mathbb{R}$ . On désigne par  $\rho$  le rayon de convergence de cette série entière, on suppose  $\rho > 0$  et on note  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$  pour  $x \in ]-\rho, \rho[$ .

II.5.1. Soit  $x \in ]-\rho, \rho[$  ; justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} k a_k x^k$  ; en déduire que la suite  $(n+1)R_n(x)$  admet une limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (et préciser cette limite).

II.5.2. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  est convergente pour  $x \in ]-\rho, \rho[$  et exprimer sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$  à l'aide de  $x$  et de la fonction  $f$ .

II.5.3. Exemple : on suppose que  $a_k = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

II.5.3.1. Déterminer alors le rayon de convergence  $\rho$  de cette série entière.

II.5.3.2. Expliciter la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$  pour  $x \in ]-\rho, \rho[$  (en justifiant le résultat).

## PROBLÈME 2

Notations :

Pour  $k \in \mathbf{N}$ ,  $j \in \mathbf{N}$  et  $0 \leq j \leq k$ , on note  $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$  le coefficient binomial (avec  $0! = 1$ ).

Si  $n \in \mathbf{N}$  on note  $\llbracket 0, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n$ ; on désigne par  $M_{n+1}(\mathbf{R})$  l'anneau des matrices carrées d'ordre  $n+1$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$ .

Si  $M \in M_{n+1}(\mathbf{R})$  on note  $M = (m_{i,j})$  avec  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  ou  $m_{i,j}$  désigne l'élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$  on considère la matrice  $W_n = (w_{i,j}) \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ ,  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  avec  $w_{i,j}$  définie par :

$$\text{si } i+j \text{ est pair : } i+j=2p \text{ alors } w_{i,j} = \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p$$

$$\text{si } i+j \text{ est impair alors } w_{i,j} = 0$$

On se propose de calculer le déterminant de  $W_n$  noté  $\det W_n$ .

### PARTIE I

I.1. Expliciter la matrice  $W_3$ .

I.2. Calculer  $\det W_3$ .

I.3. Pour  $m \in \mathbf{N}$  on note  $J_m = \int_0^\pi \cos^m t \, dt$ .

I.3.1. Calculer  $J_0$  et  $J_1$ .

I.3.2. Etablir une relation entre  $J_{m+2}$  et  $J_m$  pour  $m \in \mathbf{N}$ .

Quelle est la valeur de  $J_{2p+1}$  pour  $p \in \mathbf{N}$  ?

I.3.3. Expliciter  $J_{2p}$  en fonction de  $p$  et du coefficient binomial  $C_{2p}^p$  pour  $p \in \mathbf{N}$ .

I.3.4. Exprimer  $w_{i,j}$  en fonction de  $J_{i+j}$ , de  $i$  et de  $j$  pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

## PARTIE II

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbf{R})$  des fonctions continues sur l'intervalle  $[0, \pi]$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . On considère sur  $E$  le produit scalaire  $\langle \cdot / \cdot \rangle$  défini par :

$$\text{pour } (f, g) \in E^2 : \langle f / g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) g(t) dt .$$

On définit deux suites  $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$  et  $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $E$  par :

$$\text{pour tout } t \in [0, \pi] \quad e_0(t) = v_0(t) = 1 \quad \text{et pour } k \geq 1 \quad e_k(t) = \sqrt{2} \cos(kt), \quad v_k(t) = \cos^k(t).$$

Pour  $m \in \mathbf{N}$  on note  $H_m(e)$  le sous-espace vectoriel  $\text{vect}(e_0, e_1, \dots, e_m)$  (sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $(e_j)_{j \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ ).

On note, de même,  $H_m(v)$  le sous-espace vectoriel  $\text{vect}(v_0, v_1, \dots, v_m)$ .

II.1. Calculer les produits scalaires  $\langle e_j / e_k \rangle$  pour  $(j, k) \in \llbracket 0, m \rrbracket^2$ .

II.2. En déduire que pour tout  $m \in \mathbf{N}$  la famille  $(e_j)_{j \in \llbracket 0, m \rrbracket}$  est une base de  $H_m(e)$ .

II.3. Soit  $m \in \mathbf{N}$  ; montrer que  $v_m \in H_m(e)$ , c'est-à-dire que  $v_m = \sum_{i=0}^m q_{i,m} e_i$  ; expliciter  $q_{m,m}$  (on ne cherchera pas à calculer  $q_{i,m}$  pour  $0 \leq i \leq m-1$ ).

II.4. Démontrer l'égalité  $H_m(e) = H_m(v)$  pour tout  $m \in \mathbf{N}$ .

II.5. Pour  $m \in \mathbf{N}$  on note  $d_m$  la distance de  $v_{m+1}$  au sous-espace vectoriel  $H_m(e)$  (pour la distance associée au produit scalaire défini au début de la partie II).

Déduire de ce qui précède la valeur de  $d_m$ .

II.6. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  ; pour  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  on note  $v_j = \sum_{i=0}^n q_{i,j} e_i$  et on pose alors :

$$Q_n = (q_{i,j}) \in M_{n+1}(\mathbf{R})$$

avec  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

II.6.1. Calculer  $\det Q_n$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ .

II.6.2. Calculer  $\det W_n$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Fin de l'énoncé.**