Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

C.C.P. 2001, filière PSI, première épreuve

Problème 1

• Partie I

1.1. La série géométrique $\sum(-1)^k x^k$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$ et dans ce cas sa somme est $\dfrac{1}{1+x}\cdot$

1.2. $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\cdot$ Au facteur $\dfrac{-x}{1+x}$ près, $\sum R_n(x)$ est encore une série géométrique de raison $-x$.

On en déduit la convergence de $\sum R_n(x)$ et l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = -\dfrac{x}{(1+x)^2}\cdot$

2.1. $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge d'après le théorème des séries alternées.

2.2.1. - $\sum\limits_{k=n}^{m}(-1)^k x^k = \sum\limits_{k=n}^{m}\big(R_{k-1}(x) - R_k(x)\big) = R_{n-1}(x) - R_m(x)$, par télescopage.

- D'où $\left|\sum\limits_{k=n}^{m}(-1)^k x^k\right| \leqslant \big|R_{n-1}(x)\big| + \big|R_m(x)\big| = \dfrac{|x|^n}{1+x} + \dfrac{|x|^{m+1}}{1+x} \leqslant 2.$

2.2.2. n étant fixé, la suite de fonctions $(R_{n-1} - R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I_0 vers R_{n-1} et elle est, d'après l'inégalité du 2.2.1., dominée par la fonction constante de valeur 2, qui est intégrable sur I_0.

D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_{I_0}\big(R_{n-1}(x) - R_m(x)\big)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[m\to+\infty]{} \int_{I_0} R_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x.$

Compte tenu de l'égalité du 2.2.1. et de la linéarité de l'intégrale, il s'agit de la propriété demandée.

$\displaystyle\int_{I_0}(-1)^k x^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{k+1}$; on obtient ainsi $\displaystyle\int_{I_0} R_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = r_n.$

2.2.3. $r_0 = \displaystyle\int_0^1 R_{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$ On retrouve la valeur connue de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot$

2.2.4. $\left|\sum\limits_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{m}\dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}\right| = \dfrac{|1-(-x)^{m+1}|}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1+|x|^{m+1}}{(1+x)^2} \leqslant 2.$

2.2.5. Notons $T_m = \sum\limits_{n=0}^{m} R_{n-1} = R_{-1} + \sum\limits_{n=0}^{m-1} R_n$. La suite (T_m) converge simplement sur I_0 vers $R_{-1}+S$ et est dominée par la fonction constante de valeur 2, qui est intégrable sur I_0. Par le théorème de convergence dominée :

$$\sum_{n=0}^{m}\int_{I_0} R_{n-1} = \int_{I_0} T_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \int_{I_0}(R_{-1}+S) = \int_0^1\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot$$

D'après 2.2.2., il en résulte que $\sum r_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_n = \dfrac{1}{2}\cdot$

• Partie II

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,(R_{k-1} - R_k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum\limits_{k=0}^{n} kR_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n = \sum\limits_{k=0}^{n} R_k - (n+1)R_n$; par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k = (n+1)R_n.$$

2. On applique la question précédente avec $u_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on utilise les résultats de **I**.2.2.3. et **I**.2.2.5.

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,\frac{(-1)^{k+1}}{k} = n\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k = n\,(\ln 2 - r_n) - \sum_{k=1}^{n} k\,u_k = n\,\ln 2 + r_n - \sum_{k=0}^{n} r_k = n\,\ln 2 - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$

3.1. D'après 1., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\, u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} R_k$. Si la série $\sum R_k$ converge, ses sommes partielles sont majorées ; il en est donc de même pour les sommes partielles de la série $\sum k\, u_k$, et cette dernière est donc aussi convergente.

3.2. $0 \leqslant (n+1)R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\, u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\, u_k$, qui tend vers 0 (reste de série convergente), donc $\lim (n+1)\, R_n = 0$.

3.3. On sait par 3.1. que, si $\sum R_k$ converge, alors $\sum k\, u_k$ converge. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité du 1. et en utilisant 3.2., on obtient la réciproque et en même temps l'égalité des sommes en cas de convergence.

4. $k\, u_k(x) = \dfrac{1}{k^{x-1}}\cdot$ D'après 3.3., $\sum R_n(x)$ converge si et seulement si $x \in]2, +\infty[$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \zeta(x-1)$.

5.1. Au facteur x près, $\sum k a_k\, x^k$ est la série entière dérivée de $\sum a_k\, x^k$, donc son rayon de convergence est aussi ρ ; par conséquent cette série converge absolument pour $x \in]-\rho, \rho[$.

$(n+1)\big|R_n(x)\big| = (n+1)\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k\right| \leqslant (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k||x|^k$, qui tend vers 0 par application de 3.2. à la série à termes positifs $\sum |a_k||x|^k$. On en déduit que la suite $\big((n+1)R_n(x)\big)$ converge vers 0.

5.2. D'après la question précédente et l'égalité du 1., $\sum R_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k\, x^k = x f'(x)$.

5.3.1. (a_k) est bornée donc $\rho \geqslant 1$; (a_k) ne tend pas vers 0 donc $\rho \leqslant 1$. Finalement $\rho = 1$.

5.3.2. $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{k\pi}{2}\, x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2}\, x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n}\, x^{2n} = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}\cdot$

On calcule $f'(x) = \dfrac{1-x-x^2-x^3}{(1+x^2)^2}\cdot$ Selon 5.2., $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \dfrac{x(1-x-x^2-x^3)}{(1+x^2)^2}\cdot$

<u>Problème 2</u>

• **Partie I**

1. $W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/8 \\ 1/2 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/16 \end{pmatrix}$.

2. $\det W_3 = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 3/8 & 0 \\ 3/8 & 0 & 5/16 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/8 \\ 3/8 & 0 & 5/16 \end{vmatrix} = \dfrac{15}{256} - \dfrac{27}{512} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{128} - \dfrac{5}{64}\right) = \dfrac{30-27+18-20}{512} = \dfrac{1}{512}\cdot$

3.1. $J_0 = \pi$ et $J_1 = 0$.

3.2. On intègre par parties : $J_{m+2} = \displaystyle\int_0^\pi \cos^{m+1} t\, \cos t\, \mathrm{d}t = (m+1)\int_0^\pi \cos^m t\, \sin^2 t\, \mathrm{d}t = (m+1)(J_m - J_{m+2})$.

Par conséquent $J_{m+2} = \dfrac{m+1}{m+2}\, J_m$. Une récurrence évidente montre alors que $J_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3.3. Par récurrence, $J_{2p} = \pi\, \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)} = \pi\, \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, (p!)^2} = \dfrac{\pi}{2^{2p}} \dbinom{2p}{p}$.

3.4. En distinguant deux cas suivant la parité de $i+j$, on constate que $w_{i,j} = \frac{1}{\pi}\, J_{i+j}$.

• **Partie II**

1. Pour $(j,k) \in [\![1,m]\!]^2$, $\langle e_j / e_k \rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi 2\cos jt \cos kt\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\cos(j+k)t + \cos(j-k)t\big)\, \mathrm{d}t = \delta_{j,k}$.

Cette égalité est évidemment encore valable si $j = 0$ ou $k = 0$.

2. D'après 1., la famille $(e_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ est orthonormale ; elle est donc libre et c'est par conséquent une base de $H_m(e)$.

3. $v_m(t)=\cos^m t=\left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^m=\frac{1}{2^m}\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}e^{ikt}e^{-i(m-k)t}=\dfrac{1}{2^m}\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}e^{i(2k-m)t}.$

$v_m(t)$ étant réel, on a aussi $v_m(t)=\frac{1}{2^m}\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cos(2k-m)t=\dfrac{1}{2^m}\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cos\big(|2k-m|\,t\big).$

Comme $|2k-m|\leqslant m,$ cette égalité exprime v_m comme combinaison linéaire de $(e_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$, donc $v_m\in H_m(e)$.
De plus, le coefficient de e_m dans cette combinaison linéaire est obtenu pour $k=0$ et $k=m$; il est donc égal à 1 si $m=0$ et à $\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2^{m-1/2}}$ si $m\geqslant 1$. En conclusion :

$$v_m=\sum_{i=0}^{m}q_{i,m}\,e_i,\ \text{ avec } q_{0,0}=1 \text{ et } q_{m,m}=\frac{1}{2^{m-1/2}} \text{ pour } m\geqslant 1.$$

4. D'après la question précédente, $(v_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ est une famille de vecteurs de $H_m(e)$ dont la matrice dans la base $(e_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$ de $H_m(e)$ est triangulaire supérieure, avec pour termes diagonaux les $q_{j,j}$, qui sont non nuls.
Cette matrice est donc inversible, et par conséquent $(v_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ est aussi une base de $H_m(e)$, d'où $H_m(v)=H_m(e)$.

5. On peut écrire $v_{m+1}=q_{m+1,m+1}\,e_{m+1}+r_{m+1}=\dfrac{e_{m+1}}{2^{m+1/2}}+r_{m+1},$ avec $r_{m+1}\in H_m(e)$.
D'après 1., $e_{m+1}\in H_m(e)^{\perp}$, donc $\dfrac{e_{m+1}}{2^{m+1/2}}$ est le projeté orthogonal de v_{m+1} sur $H_m(e)^{\perp}$. Par conséquent :

$$d_m=d\big(v_{m+1},H_m(e)\big)=\left\|\frac{e_{m+1}}{2^{m+1/2}}\right\|=\frac{1}{2^{m+1/2}}.$$

6.1. Q_n est triangulaire supérieure, donc $\det Q_n=\prod\limits_{i=0}^{n}q_{i,i}=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2^{i-1/2}}=\dfrac{1}{2^{\,n^2/2}}.$

6.2. D'après **I**.3.4. et compte tenu de l'orthonormalité de $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, on peut écrire :

$$\forall (i,j)\in [\![0,n]\!]^2,\ w_{i,j}=\frac{1}{\pi}J_{i+j}=\langle v_i/v_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}q_{k,i}\,q_{k,j}.$$

On en déduit que $W_n={}^tQ_n\,Q_n,$ puis que $\det W_n=(\det Q_n)^2=\dfrac{1}{2^{\,n^2}}.$