CCP PSI 2000 math 1: corrigé

PARTIE I

I.1.1.1 (E) s'écrit $y''=0$ d'où $\boxed{S(E)=\{x\mapsto ax+b\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}}$ et $\boxed{S^0(E)=\{0\}}$.

I.1.2.1 (E) s'écrit $y''-\omega^2y=0$ d'où $\boxed{S(E)=\{x\mapsto ae^{\omega x}+be^{-\omega x}\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}}$.

$y=ae^{\omega x}+be^{-\omega x}$ appartient à $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} a+b=0 \\ ae^{\omega\pi}+e^{-\omega\pi}=0 \end{cases}$ système de déterminant non nul car $\omega\neq 0$.

La seule solution est donc la solution nulle : $\boxed{S^0(E)=\{0\}}$.

I.1.2.2 (E) s'écrit $y''+\omega^2y=0$ d'où $S(E)=\{x\mapsto a\cos\omega x+b\sin\omega x\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

$y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ appartient à $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} a=0 \\ a\cos\omega\pi+b\sin\omega\pi=0 \end{cases}$.

Cas 1: $\omega\in\mathbb{Z}^*$ alors $S^0(E)=\{x\mapsto b\sin\omega x\,/\,b\in\mathbb{R}\}$.

Cas 2: $\omega\notin\mathbb{Z}$ alors $S^0(E)=\{0\}$.

I.2.2.1 (E) s'écrit $y''=\cos x$ qui donne $S(E)=\{x\mapsto -\cos x+ax+b\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. Une telle solution est dans $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} b-1=0 \\ a\pi+b+1=0 \end{cases}$. D'où $\boxed{S^0(E)=\left\{x\mapsto -\cos x-\frac{2}{\pi}x+1\right\}}$.

I.2.1.2 (E) s'écrit $y''=\sin nx$ qui donne $S(E)=\left\{x\mapsto -\frac{1}{n^2}+ax+b\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Une telle solution est dans $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} b=0 \\ a\pi+b=0 \end{cases}$. D'où $\boxed{S^0(E)=\left\{x\mapsto \frac{-1}{n^2}\sin nx\right\}}$.

I.2.2.1 (E) s'écrit $y''=|\cos x|$.

Sur $[0,\pi/2]$ $y''=\cos x \iff \exists a,b\in\mathbb{R}\quad y=ax+b-\cos x$

$y''=\cos x \iff \exists a,b\in\mathbb{R}\quad y=ax+b-\cos x$.

Sur $[\pi/2,\pi]$ $y''=-\cos x \iff \exists c,d\in\mathbb{R}\quad y=cx+d+\cos x$.

Une solution sur $[0,\pi]$ doit être solution sur $[0,\pi/2]$ et sur $[\pi/2,\pi]$ donc vérifie

$\exists a,b,c,d\in\mathbb{R},\quad \forall x\in[0,\pi/2], y(x)=ax+b-\cos x$

$\forall x\in[\pi/2,\pi], y(x)=cx+d+\cos x$.

De plus une telle fonction doit être définie de manière unique en $\pi/2$, continue et dérivable en $\pi/2$, ce qui suffira à la rendre C^2 sur $[0,\pi]$ et solution de (E) (car la dérivée seconde sera $x\mapsto|\cos x|$ continue en $\pi/2$).

D'où les conditions nécessaires et suffisantes $\begin{cases} a\frac{\pi}{2}+b=c\frac{\pi}{2}+d & \text{(continuité)} \\ a+1=c-1 & \text{(dérivabilité)} \end{cases}$

d'où l'on tire: $\begin{cases} c=a+2 \\ d=(a-c)\frac{\pi}{2}+b=-\pi+b \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Conclusion}\quad S(E)=\left\{f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\quad \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}\forall x\in[0,\pi/2], f(x)=ax+b-\cos x \\ \forall x\in[\pi/2,\pi], f(x)=(a+2)x-\pi+b+\cos x\end{cases}\right\}.}$$

I.2.2.2 $f\in S^0(E)$ ssi $\begin{cases} b-1=0 \\ (a+2)\pi-\pi+b-1=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$, ce qui fournit une unique solution.

D'où $\boxed{S^0(E)=\left\{F:[0,\pi]\to\mathbb{R},\quad \begin{cases}\forall x\in[0,\pi/2], f(x)=-x+1-\cos x \\ \forall x\in[\pi/2,\pi], f(x)=x-\pi+1+\cos x\end{cases}\right\}}$.

I.3 (E) s'écrit $y''=f(x)$ qui se résout en $y'=\int_0^s f + A$ puis $y=\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du + Ax + B$.

La condition $y \in S^0(E)$ se traduit par $\begin{cases} B = 0 \\ \int_0^\pi\left[\int_0^u f(t)dt\right]du + A\pi = 0 \end{cases}$ ce qui fournit une unique solution.

D'où $S^0(E)=\left\{F_1:[0,\pi]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\left[\int_0^u f(t)dt\right]du\right\}$.

I.4 D'une part φ est bien une application de $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ dans lui-même.

D'autre part si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f,g \in C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ alors l'application $h=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$ vérifie $h''=\lambda\varphi(f)''+\varphi(g)''=\lambda f+g$, $h(0)=\lambda\varphi(f)(0)+\varphi(g)(0)=0$, et de même $h(\pi)=0$. L'unicité obtenue au **I.3** permet d'identifier $h=\varphi(\lambda f+g)$, ce qui établit la linéarité de φ.

I.5 $f\in\ker\varphi \Rightarrow \varphi(f)=0 \Rightarrow [\varphi(f)]''=0 \Rightarrow f=0$. Ce qui établit l'injectivité de φ.

La fonction $x\mapsto 1$ de $C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ n'a pas d'antécédent par φ car elle ne s'annule pas en 0.
Donc φ n'est pas surjective.

I.6 $\varphi(f)=\lambda f$ donne $f=\lambda f''$ en dérivant deux fois. Or 0 n'est pas valeur propre d'après la question précédente. D'où $f''-\frac{1}{\lambda}f=0$ (avec toujours $f(0)=f(\pi)=0$) ce qui nous ramène à la question **I.1.2.2** Pour obtenir des solutions non nulles le seul cas est $\frac{-1}{\lambda}=n^2$ avec $n\in\mathbb{Z}^*$(ou $\mathbb{N}^*$) auquel cas le sous-espace propre associé est $\{x\mapsto b\sin nx\,/\,b\in\mathbb{R}\}$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi)=\left\{\frac{-1}{n^2}/\,n\in\mathbb{N}^*\right\}}$ et $\boxed{E_{\frac{-1}{n^2}}=\{x\mapsto b\sin nx\,/\,b\in\mathbb{R}\}}$.

I.7.1

I.7.2 $T_x=\{(t,u)\in\mathbb{R}^2/\,0\le t\le x \text{ et } t\le u\le x\}$ donc par Fubini

$$\iint_{T_x} f(t)dtdu=\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du=\int_0^x\left[\int_t^x f(t)du\right]dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt.$$

I.7.3.1 $F_1=\varphi(f)$ s'exprime par la formule de **I.3** :

$$\begin{aligned}F_1(x)&=\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du-\frac{x}{\pi}\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du\\&=\int_0^x(x-t)f(t)dt-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)f(t)dt\end{aligned}$$

(autrement dit $\boxed{b=\frac{-1}{\pi}}$).

I.7.3.2 $F_1(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt-\int_0^x\frac{x}{\pi}(\pi-t)f(t)dt-\int_x^\pi\frac{x}{\pi}(\pi-t)f(t)dt$ (Chasles)

soit $F_1(x)=\frac{-1}{\pi}\left(\int_0^x f(t)t(\pi-x)dt+\int_x^\pi x(\pi-t)f(t)dt\right)$ (autrement dit $\boxed{g=\frac{-1}{\pi}}$).

PARTIE II

II.1 Posons $u_n(x,y)=\frac{\sin nx\sin ny}{n^2}$. Alors $|u_n(x,y)|\le\frac{1}{n^2}$ ce qui prouve que la série $\sum u_n(x,y)$ est absolument convergente. Donc la fonction K est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

II.2 En fixant $y\in\mathbb{R}$ posons $v_n(x)=u_n(x,y)$, ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\quad |v_n(x,y)|\le\frac{1}{n^2}$. $\sum v_n$ est donc une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ convergeant normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$, sa somme est donc continue.

Pour tout y fixé, la fonction $x\mapsto K(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II.3.1 On vérifie que la fonction E_x est continue en x, en 0, en π, et qu'elle est donc affine par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier elle est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence normale:

la série de Fourier de E_x converge et sa somme est E_x.

II.3.2 E_x étant impaire les a_n sont nuls et on obtient après calculs: $\boxed{b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi E_x(t)\sin nt\,dt=\frac{2}{n^2}\sin nx}$.