ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2020

LUNDI 20 AVRIL 2020 - 8h00 – 12h00
FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES
(XEULC)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Notations

Dans tout le problème, pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \leqslant b$, on notera $[\![a,b]\!] = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leqslant i \leqslant b\}$ l'ensemble des entiers compris entre a et b.

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $p \times q$ (p lignes et q colonnes). Lorsque $p = q$, on notera $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $p \times p$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $A^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désignera la transposée de A. Un vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ pourra être identifié à un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et u^{T} sera le vecteur ligne associé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A \odot B$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$ par :

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij} B_{ij}$$

où pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, M_{ij} désigne le coefficient de la ligne i et de la colonne j.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit $A^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $A^{(0)}_{ij} = 1$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$ puis par récurrence, $A^{(n+1)} = A^{(n)} \odot A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin, on dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique positive si $A^{\mathrm{T}} = A$ et $u^{\mathrm{T}} A u \geqslant 0$ pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sera noté $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Dépendances des parties

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et la partie V dépend des parties précédentes.

Partie I

(1) Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{Sym}^+(p)$ et tous réels positifs a et b, on a $aA + bB \in \mathrm{Sym}^+(p)$

(2) Montrer que si $v \in \mathbb{R}^p$ alors la matrice $A = (A_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ définie par $A = vv^{\mathrm{T}}$ est dans $\mathrm{Sym}^+(p)$.

(3) (a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^p$, on a $(uu^{\mathrm{T}}) \odot (vv^{\mathrm{T}}) = (u \odot v)(u \odot v)^{\mathrm{T}}$.

(b) Soit $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A et $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille orthonormale de vecteurs propres associés. Montrer que $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et que $A = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$.

(c) En déduire que si $A, B \in \mathrm{Sym}^+(p)$ alors $A \odot B \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie II

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $f[A] \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $f[A]_{ij} = f(A_{ij})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

(4) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ un polynôme à coefficients positifs.

(a) Vérifier que $P[A] = \sum_{k=0}^{n} a_k A^{(k)}$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que si $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$ alors $P[A] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

On pose, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ où $k!$ désigne la factorielle de k.

(5) Soit $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

(a) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a

$$\lim_{n\to\infty} P_n[A]_{ij} = \exp(A_{ij})\,.$$

(b) Montrer que $\exp[A] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

(c) Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\exp[A] \odot (uu^{\mathrm{T}}) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

(6) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère un p-uplet $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et la matrice

$$A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$

où $\langle a,b\rangle$ désigne le produit scalaire usuel entre deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^d$. On notera $|a| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$ la norme de a.

(a) Montrer que $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

(b) On note $u \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de coordonnées $(\exp(-\frac{|x_1|^2}{2}), \cdots, \exp(-\frac{|x_p|^2}{2}))$. Montrer que $(\exp[A] \odot (uu^{\mathrm{T}}))_{ij} = \exp(-\frac{|x_i-x_j|^2}{2})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

(c) Soient $\lambda > 0$ et $K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $K_{ij} = \exp(-\frac{|x_i-x_j|^2}{2\lambda})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Montrer que $K \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie III

Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère ici l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, on désigne par $\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (*on ne demande pas de vérifier ce fait*) défini par

$$\mathscr{E} = \{\ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists (a,A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tel que } \ \forall y \in \mathbb{R}\ |f(y)| \leqslant A\exp(-y^2/a)\ \}\,.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\tau_x : \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application définie pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\tau_x(f)(y) = f(y-x)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Enfin on définit la fonction $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\gamma_\lambda(y) = \exp(-y^2/\lambda)\,.$$

(7) Pour tout $(f,g) \in \mathscr{E}^2$, montrer que fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tous $f,g \in \mathscr{E}$, on définit

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)dy\,.$$

(8) (a) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$, on a $(f \mid f) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $f = 0$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathscr{E}$.

(9) (a) Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)dy = c\exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\,.$$

Indication : On pourra montrer l'égalité

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}(y - \frac{ax}{a+\lambda})^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}\,.$$

(b) Soit $g \in \mathscr{E}$. On considère $C(g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid g)\,.$$

Montrer que $C(g) \in \mathscr{E}$.

(c) Montrer que $C : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ définit un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

Partie IV

Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions g s'écrivant sous la forme $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$ où n est un entier strictement positif et $((x_i, \alpha_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\ (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \}\,.$$

On notera $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$ l'image de $\mathcal{G}$ par l'endomorphisme C introduit dans la question (9b).

(10) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ qui contient toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire.

(11) (a) Montrer qu'il existe $c_\lambda > 0$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on a

$$(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x')\,.$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{1}{\lambda}((y-x)^2 + (y-x')^2) = \frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$$

et que

$$\mathcal{H} = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\ (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \}\,.$$

(12) (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a $x_i \neq x_j$ lorsque $i \neq j$. Montrer que la fonction $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle si et seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ *(Indication : On pourra procéder par récurrence sur n).*

(b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire D de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ telle que $D \circ C(g) = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $C \circ D(h) = h$ pour tout $h \in \mathcal{H}$.

(c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $h(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid D(h))$.

(13) Pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, on note $(h_1 \mid h_2)_{\mathcal{H}} = c_\lambda (D(h_1) \mid D(h_2))$ où c_λ est introduit dans la question (11a).

(a) Vérifier que $(\ \mid\ )_{\mathcal{H}}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

(b) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}$ on a $h(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid h)_{\mathcal{H}}$.

(c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$ on a

$$\|h\|_\infty \leqslant \|h\|_{\mathcal{H}}$$

où on a posé $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ et $\|h\|_{\mathcal{H}} = (h \mid h)_{\mathcal{H}}^{1/2}$.

Partie V

On fixe dans cette partie deux p-uplets $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de réels. On suppose que les x_i sont deux à deux distincts. On note $\mathcal{S} = \{\ h \in \mathcal{H} \mid h(x_i) = a_i\ \}$ l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ qui valent a_i en x_i pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ (on dira qu'une telle fonction est une interpolante). On note $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ défini par $J(h) = \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2$ et $J_* = \inf\{\ J(h) \mid h \in \mathcal{S}\ \}$.

On veut montrer dans cette partie qu'il existe une unique interpolante $h_* \in \mathcal{S}$ qui atteint le minimum de J c'est-à-dire telle que $J(h_*) = J_*$. On notera $\mathcal{S}_* = \{\ h \in \mathcal{S} \mid J(h) = J_*\ \}$.

(14) Montrer $\mathcal{S}_*$ a au plus un élément.

(15) Soient $\mathcal{H}_0 = \{\ h \in \mathcal{H} \mid h(x_i) = 0\ \forall i \in [\![1,p]\!]\ \}$ et $\tilde{h} \in \mathcal{S}_*$ (on suppose ici $\mathcal{S}_*$ non vide). Montrer que $(\tilde{h} \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0$ pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$.

(16) On note $\mathcal{H}_0^\perp = \{\ h \in \mathcal{H} \mid \forall h_0 \in \mathcal{H}_0\ (h \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0\ \}$ le sous-espace orthogonal à $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}$.

- (a) Montrer que $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.
- (b) Montrer que $\mathcal{H}_0^\perp$ contient le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les fonctions $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ pour $i \in [\![1,p]\!]$.

(17) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^p$ (resp. $a \in \mathbb{R}^p$) le vecteur de coordonnées $(\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ (resp. $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$) et $h_\alpha = \sum_{i=1}^p \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$.

- (a) Montrer que h_α est une interpolante si et seulement si $K\alpha = a$ où K est la matrice introduite dans la question (6) (ici dans le cas $d = 1$).
- (b) Montrer que K est inversible.

(18) En déduire qu'il existe $\alpha_* \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\}$ et calculer la valeur de J_* en fonction de K et a.