Math X-ESPCI PC 2019-20

$\odot$ = produit de Hadamard.

Partie I

1. $a\mathrm{A}+b\mathrm{B}$ est bien une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ et, puisque a et b sont positifs, pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}}\left(a\cdot \mathrm{A}+b\cdot \mathrm{B}\right)u = a\cdot u^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{A}\right)u + b\cdot u^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{B}\right)u \geqslant 0,$$

donc $a\mathrm{A}+b\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

2. $\mathrm{A} = (v_i v_j)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ est une matrice symétrique et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = u^{\mathrm{T}}vv^{\mathrm{T}}u = (v^{\mathrm{T}}u)^2 \geqslant 0$$

($v^{\mathrm{T}}u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^p$).

3. a $\left[\left(uu^{\mathrm{T}}\right)\odot\left(vv^{\mathrm{T}}\right)\right]_{i,j} = [u_i u_j v_i v_j]_{i,j}$ or

$$\left[\left(u\odot v\right)\left(u\odot v\right)^{\mathrm{T}}\right]_{i,j} = \left(u\odot v\right)_i\left(u\odot v\right)_j = u_i v_i u_j v_j = u_i u_j v_i v_j,$$

d'où l'égalité.

b • Puisque $u_k^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u_k = \lambda_k\left(u_k^{\mathrm{T}}u_k\right) \geqslant 0$ et $u_k^{\mathrm{T}}u_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(u_k\right)_i^2 = \|u_k\|_{\mathbb{R}^p}^2 > 0$, $\lambda_k \geqslant 0$.

• La famille orthonormale de p vecteurs $(u_1,\cdots,u_p)$ est une base de vecteurs propres (rappelons qu'elle existe grâce au théorème spectral).
Soit $\mathrm{B} = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$. Pour $i \in [\![1,p]\!]$,

$$\mathrm{B}u_i = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}} u_i = \lambda_i u_i = \mathrm{A}u_i$$

car $u_k^{\mathrm{T}}u_i = 0$ si $k \neq i$ et $u_i^{\mathrm{T}}u_i = 1$. Deux endomorphismes coïncidant sur la base $(u_1,\ldots,u_p)$ sont égaux, donc $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
Remarque la formule est naturelle car $u_k u_k^{\mathrm{T}}$ est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u_k)$.

c Écrivons que $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{B} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\mu_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$ avec $\lambda_k \geqslant 0$ et $\mu_k \geqslant 0$.
Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\odot\mathrm{B} &= \sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}\lambda_i\mu_j\left(u_i u_i^{\mathrm{T}}\right)\odot\left(v_j v_j^{\mathrm{T}}\right)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}\lambda_i\mu_j\left(u_i\odot v_j\right)\left(u_i\odot v_j\right)^{\mathrm{T}} \text{ d'après 3)}\end{aligned}$$

donc, puisque $\lambda_i\mu_j \geqslant 0$ et par les questions 2) et 1), cette dernière étant étendue par récurrence à un nombre fini quelconque de matrices, $\mathrm{A}\odot\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie II

4. a On a par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\left(\mathrm{A}^{(k)}\right)_{i,j} = \left(a_{i,j}\right)^k$ d'où le résultat.

b On a $\mathrm{A}^{(0)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ (question 2) avec $v = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$), et 3)c) permet alors de montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{A}^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. Donc, par 1) comme précédemment, $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p) \implies \mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

5. a Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(\mathrm{P}_n[\mathrm{A}])_{i,j} = \mathrm{P}_n(\mathrm{A}_{i,j})$, or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = \exp(x)$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{P}_n[\mathrm{A}])_{i,j} = \exp(\mathrm{A}_{i,j}).$$

b Montrons plus généralement :
Lemme $\mathrm{Sym}^+(p)$ est un fermé de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.
Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathrm{Sym}^+(p)$ convergeant vers A. Montrons que $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.
• Les matrices A_n sont symétriques donc A est également symétriques.
• Soit $u \in \mathbb{R}^p$, $u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_n u\right) \geqslant 0$ par continuité de $\mathrm{M} \mapsto u^{\mathrm{T}}\mathrm{M}u$, continue car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$. – fin de la preuve du lemme –
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ d'après 4)b) donc par le lemme, $\exp[\mathrm{A}] = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

c $\exp[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ et par 2), $uu^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Sym}^+(p)$, donc par 3)c), $\exp[\mathrm{A}] \odot \left(uu^{\mathrm{T}}\right) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

6. a Il est clair que A est une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.
Pour tout $u = (u_1, \cdots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} u_i \mathrm{A}_{i,j} u_j =< \sum_{i=1}^n u_i x_i, \sum_{j=1}^n u_j x_j > \text{ par bilinéarité de } < \cdot, \cdot > \\ &= \left| \sum_{i=1}^n u_i x_i \right|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

b Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$\left(\exp[\mathrm{A}] \odot \left(uu^{\mathrm{T}}\right)\right)_{i,j} = \exp(\mathrm{A}_{i,j})u_i u_j = \exp\left(< x_i, x_j > - \frac{|x_i|^2}{2} - \frac{|x_j|^2}{2}\right).$$

Or $|x_i - x_j|^2 = |x_i|^2 - 2 < x_i, x_j > + |x_j|^2$, donc

$$\left(\exp[\mathrm{A}] \odot \left(uu^{\mathrm{T}}\right)\right)_{i,j} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right).$$

c En posant $\widetilde{x_i} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} x_i$ puis $\widetilde{\mathrm{A}} = (< \widetilde{x_i}, \widetilde{x_j} >)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$, il vient directement

$$\left(\exp[\widetilde{\mathrm{A}}] \odot \left(uu^{\mathrm{T}}\right)\right)_{i,j} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda}\right) = \mathrm{K}_{i,j}.$$

Comme $\widetilde{\mathrm{A}}$ est de la même forme que A, $\widetilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ et donc $\mathrm{K} = \exp[\widetilde{\mathrm{A}}] \odot \left(uu^{\mathrm{T}}\right) \in \mathrm{Sym}^+(p)$ d'après 5)c).

Partie III

7. Il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B}, a, b$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y)| \leqslant \mathrm{A}\exp\left[-\frac{y^2}{a}\right] \text{ et } |g(y)| \leqslant \mathrm{B}\exp\left[-\frac{y^2}{b}\right].$$

Il vient pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|(fg)(y)| \leqslant \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) y^2\right],$$

et, comme $1/a + 1/b > 0$, on a par croissances comparées

$$|fg(y)| = \underset{|y|\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{y^2}\right),$$

fg étant par ailleurs continue sur $\mathbb{R}$, par comparaison à l'exemple de Riemann, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

8. a La fonction f^2 est continue positive sur $\mathbb{R}$, intégrable par 7), donc $(f|f) \geqslant 0$, et par théorème il y a égalité si et seulement si f^2, i.e. f, est constamment nulle sur $\mathbb{R}$.
Bien sûr, $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{E}$.

b Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| = \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right).$$

Or,

$$\exp\left(\frac{y^2}{2\lambda}\right) \cdot |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| = \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda} + \alpha y + \beta\right) \underset{y \to \pm\infty}{\to} 0,$$

donc la fonction continue sur $\mathbb{R}$, $y \mapsto \exp\left(\dfrac{y^2}{2\lambda}\right) \cdot |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)|$ est bornée. Il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| \leqslant \mathrm{A} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right).$$

9. a Démonstration de l'égalité de l'indication :

$$\begin{aligned}\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} &= \frac{\left[(a+\lambda)y^2 - 2axy\right] + ax^2}{a\lambda} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{1}{a\lambda}\left(ax^2 - (a+\lambda)\left(\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) \\ &= \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{a+\lambda}\right) = \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}.\end{aligned}$$

Suivons l'indication de l'énoncé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) \mathrm{d}y = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) \mathrm{d}y}_{=c(x)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right).$$

Montrons enfin que $c(x)$ ne dépend pas de x. Plus généralement avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, par changement de variable,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\,(y-\beta)^2\right) \mathrm{d}y \underset{u=y-\beta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha u^2\right) \mathrm{d}u,$$

donc $c(x)$ ne dépend pas de x présent dans $\beta = \dfrac{ax}{a+\lambda}$.

b Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{C}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_x(\gamma_\lambda)(y) g(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) \mathrm{d}y$$

• Tout d'abord la fonction $\mathrm{C}(g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par application du théorème de continuité sur les intégrales à paramètre (ici x).
Les hypothèses naturelles sont vérifiées et on peut utiliser l'hypothèse de domination locale suivante, avec $|g(y)| \leqslant \mathrm{A} \exp\left[-\dfrac{y^2}{a}\right]$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y)\right| \leqslant |g(y)| \leqslant \mathrm{A} \exp\left[-\frac{y^2}{a}\right]$$

et $y \mapsto \mathrm{A} \exp\left[-\dfrac{y^2}{a}\right]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{C}(g)(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) \mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \mathrm{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left[-\frac{y^2}{a}\right] \mathrm{d}y \\ &\leqslant \mathrm{A} \cdot c \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \text{ d'après 9)a).}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{C}(g) \in \mathscr{E}$ (avec $\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{A} \cdot c$ et $a \leftarrow a + \lambda$).

c Aucune difficulté par bilinéarité du produit scalaire.

Partie IV

10. $\mathscr{G} = \operatorname{Vect}\left\{\tau_x(\gamma_\lambda), (x,\lambda) \in \mathbb{R}^2\right\}$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ d'après 8)b) et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $\left\{\tau_x(\gamma_\lambda), (x,\lambda) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

11. a L'indication se montre facilement (comme au 9)a)).
Écrivons

$$\begin{aligned}
(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{(y-x')^2}{\lambda}\right) \mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}\left(y-(x+x')/2\right)^2\right) \mathrm{d}y}_{=\widetilde{c}(x,x')} \cdot \exp\left(-\frac{(x'-x)^2}{2\lambda}\right).
\end{aligned}$$

A la question 9)a), nous avons que $\widetilde{c}(x,x')$ ne dépend pas de x et de x' (par changement de variable), notons cette constante c_λ, d'où le résultat, $(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x-x')$.
On a $c_\lambda > 0$ par le même argument qu'en 8)a).

b D'où pour $x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') &= (\tau_{x'}(\gamma_\lambda) \mid \tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x'-x) \qquad (\gamma_{2\lambda} \text{ est paire}) \\
&= c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x'),
\end{aligned}$$

donc on a bien $\mathrm{C}(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$.
Puis $\mathcal{H} = \operatorname{Vect}\{c_\lambda \cdot \tau_x(\gamma_{2\lambda}),\ x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{\tau_x(\gamma_{2\lambda}),\ x \in \mathbb{R}\}$ car $c_\lambda \neq 0$ (c'est l'intégrale d'une exponentielle), d'où le résultat.

12. a • $n = 1$. Puisque $\tau_x(\gamma_{2\lambda})$ est une fonction non nulle, $\{\tau_x(\gamma_{2\lambda})\}$ est libre.
• Soit $n \geqslant 2$. Supposons la liberté établie pour toute famille de réels distincts $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$.
Soit une famille de réels $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (ordonnons $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$) et supposons qu'il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$.
Lemme Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\tau_{x_n}(\gamma_{2\lambda})(x)\right)$.
En effet $(x-x_n)^2 - (x-x_i)^2 = 2x(x_i - x_n) + x_n^2 - x_i^2 \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$.
Si $\alpha_n \neq 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha_n \tau_{x_n}(\gamma_{2\lambda})(x)$, absurde car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est la fonction nulle. Ainsi $\alpha_n = 0$ et on peut conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

b On cherche à montrer que C est bijective (de réciproque notée D).
Déjà C est clairement sujective puisque $\mathcal{H} = \mathrm{C}(\mathscr{G})$.
Ensuite, C est injective car si $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \in \ker \mathrm{C}$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot c_\lambda \cdot \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) = 0,$$

et, avec $c_\lambda \neq 0$ et la question précédente, tous les α_i sont nuls donc $g = 0$.

c Pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
h(x) &= (\mathrm{C} \circ \mathrm{D})(h)(x) \\
&= (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \mathrm{D}(h)) \text{ par définition de C.}
\end{aligned}$$

13. a Rappelons que $c_\lambda > 0$. On vérifie sans peine les définitions du produit scalaire (D est injective).

b D'après 12)c), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(x) &= (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \mathrm{D}(h)) \\
&= ((\mathrm{D} \circ \mathrm{C})(\tau_x(\gamma_\lambda)) \mid \mathrm{D}(h)) \text{ d'après 12)b)} \\
&= \frac{1}{c_\lambda} \left(\mathrm{C}(\tau_x(\gamma_\lambda)) \mid h\right)_{\mathcal{H}} \text{ par définition} \\
&= (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid h)_{\mathcal{H}} \text{ d'après 11)b).}
\end{aligned}$$

c Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leqslant \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \cdot \|h\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Or $\tau_x(\gamma_{2\lambda}) = \dfrac{1}{c_\lambda}\mathrm{C}\left(\tau_x(\gamma_\lambda)\right)$ et

$$\begin{aligned}\|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2 &= c_\lambda \cdot \frac{1}{c_\lambda^2}\left(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_x(\gamma_\lambda)\right)\\ &= \gamma_{2\lambda}(0) = 1 \text{ d'après 11)a) et b) et 12)b).}\end{aligned}$$

Ainsi, $\|h\|_\infty \leqslant \|h\|_{\mathcal{H}}\,.$

Partie V

L'énoncé de $\mathcal{S}$ est trop elliptique (mettre pour tout i dans les accolades).
C'est le principe des moindre carrés sur l'espace affine $\mathcal{S}$ (projection de 0) mais qui n'est pas de dimension finie.

14. Supposons que $\mathcal{S}_*$ admette deux éléments h et $h + a$.
Alors la fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$

$$\psi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|h + ta\|_{\mathcal{H}}^2 = \|a\|_{\mathcal{H}}^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (h \mid a)_{\mathcal{H}} + \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \end{array}\right.$$

admet un minimum en deux points distincts (0 et 1), absurde si $a \neq 0$ (on connait les variations des polynômes de degré 2).

15. C'est quasiment la même preuve... Remarquons que $\mathcal{H} = \widetilde{h} + \mathcal{H}_0$.
On considère la fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$

$$\varphi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\|\widetilde{h} + th_0\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \cdot t^2 + 2t \cdot \left(\widetilde{h} \mid h_0\right)_{\mathcal{H}} + \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2 \end{array}\right.$$

qui admet un minimum en 0, donc $\varphi'(0) = 0 = 2\left(\widetilde{h} \mid h_0\right)_{\mathcal{H}}$.

16. a $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ est immédiat avec la question précédente.
Réciproquement, si $\widetilde{h} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, $h - \widetilde{h} \in \mathcal{H}_0$ donc, par Pythagore,

$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|h - \widetilde{h} + \widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|h - \widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2$$

D'où $\|h\|_{\mathcal{H}} \geqslant \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2$.

b Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Soit $h_0 \in \mathcal{H}_0$.

$$\begin{aligned}\left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid h_0\right)_{\mathcal{H}} &= h_0(x_i) \text{ d'après 13)b)}\\ &= 0 \text{ par définition,}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

17. a Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$h_\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \underbrace{\tau_{x_j}\left(\gamma_{2\lambda}\right)(x_i)}_{=\mathrm{K}_{i,j}} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathrm{K}_{i,j} = (\mathrm{K}\alpha)_i.$$

Donc

$$\left(\forall i \in [\![1,p]\!],\ h_\alpha(x_i) = a_i\right) \Leftrightarrow \mathrm{K}\alpha = a.$$

b Soit α tel que $\mathrm{K}\alpha = 0$.
Par 17)a), on a $h_\alpha \in \mathcal{H}_0$ (c'est une interpolante pour $(0,\ldots,0)$). Mais, par 16)b), h_α est toujours dans $\mathcal{H}_0^\perp$. Donc $h_\alpha = 0$. Ce qui, avec 12)a), donne $\alpha = (0)$.

18. On pose $\alpha_* = \mathrm{K}^{-1}a$. Alors $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ donc h_{α_*} est solution, et on sait que c'est la seule possible. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_* &= \frac{1}{2}\left\|h_{\alpha_*}\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(h_{\alpha_*} \mid h_{\alpha_*}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \alpha_{*,i}\alpha_{*,j}\left(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \frac{c_\lambda}{2}\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \alpha_{*,i}\alpha_{*,j}\left(\mathrm{D}(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})) \mid \mathrm{D}(\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))\right) \\
&= \frac{1}{c_\lambda}\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \alpha_{*,i}\alpha_{*,j}\left(\tau_{x_i}(\gamma_{\lambda}) \mid \tau_{x_j}(\gamma_{\lambda})\right) \text{ d'après 11)b)} \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \alpha_{*,i}\alpha_{*,j}\gamma_{2\lambda}(x_i - x_j) \text{ d'après 11)a)} \\
&= \alpha_*^{\mathrm{T}}\mathrm{K}\alpha_* = \boxed{a^{\mathrm{T}}\mathrm{K}^{-1}a}
\end{aligned}$$