ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2014 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

$\star\star\star$

Ce sujet est consacré à l'étude de propriétés asymptotiques de certaines intégrales à paramètre.

NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS.

Nombres. On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Fonctions numériques. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^0(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$), l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^k(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$), l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes). On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes).

Si g est une fonction bornée sur I, on note $\|g\|_{\infty,I}$ (ou simplement $\|g\|_\infty$) la valeur

$$\|g\|_{\infty,I} = \sup_{x \in I} |g(x)|.$$

Si I est un intervalle ouvert, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est à support compact dans I s'il existe $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, tels que pout tout $x \in I \setminus [\alpha, \beta]$, $f(x) = 0$.

Séries indexées par $\mathbb{Z}$. Pour une famille de nombres réels ou complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dit que la série $\sum a_n$ est convergente si les deux séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

sont convergentes, et on pose alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

Coefficients de Fourier. Si $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est périodique de période 2π, et si $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier de ϕ est

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\phi(x)dx.$$

Dans tout le sujet, a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

Les trois parties du sujet sont indépendantes.

I - Intégrales à phase réelle

1. *Deux cas particuliers.* Soit $d > 0$. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,d])$ telle que $g(0) \neq 0$.
   (a) Montrer que
   $$\int_0^d e^{-tx}g(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}.$$
   Indication. Pour $t > 0$, on pourra construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, bornée, telle que
   $$\int_0^d e^{-tx}g(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-x}g_t(x)dx.$$
   (b) Montrer de même que
   $$\int_0^d e^{-tx^2}g(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{g(0)}{\sqrt{t}}.$$
   Indication. On rappelle l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ telle que $f(a) \neq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}$, on note

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)dx.$$

Les deux cas étudiés à la question 1) correspondent à $\varphi(x) = x$ et $\varphi(x) = x^2$, respectivement, lorsque $a = 0$ et $b = d$.

2. *Cas où la phase φ n'a pas de point critique dans* $[a,b]$. On suppose que $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (a) Montrer que $\Phi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle de la forme $[0,\beta]$, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Montrer que

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t}.$$

Indication. On se ramènera au cas traité à la question 1a) à l'aide d'un changement de variable.

3. *Cas où la phase φ a un point critique en a.* On suppose maintenant que $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$, et $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b]$.
   (a) Montrer que la formule $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Calculer $\psi'(a)$.
   (b) Montrer que ψ réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle de la forme $[0,\beta]$.
   (c) Montrer que

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

Indication. On se ramènera au cas traité à la question 1b) à l'aide d'un changement de variable.

On admettra que le résultat se généralise de la façon suivante :

Résultat 1. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$. On suppose qu'il existe un unique $c > 0$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On suppose de plus que $f(c) \neq 0$ et $\varphi''(c) > 0$. On suppose finalement que $\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(x)}|f(x)|dx$ converge. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}} \frac{e^{-t\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{t}}.$$

4. *Application.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$.
   (a) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On utilisera une récurrence.*
   (b) En déduire l'équivalent suivant

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}.$$

Indication. On réécrira d'abord $\Gamma(n+1)$ sous la forme

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(x-\ln x)}dx.$$

II - Fonctions périodiques

5. *Séries de Fourier.* Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(\phi) = \dfrac{c_n(\phi')}{in}$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$ converge. *Indication. Utiliser la formule de Parseval pour la fonction ϕ'.*

(c) Montrer que $\|\phi\|_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$.

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique de période 2π. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Pour tout paramètre $\varepsilon > 0$, on pose

$$J_\varepsilon = \int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)dx.$$

6. *Premier cas.* Dans cette question, on suppose de plus que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que f est à support compact dans $]a,b[$.

   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

   $$\left| J_\varepsilon - c_0(\psi)\left(\int_a^b f(x)dx\right)\right| \leq \varepsilon(b-a)\|f'\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(\psi)|}{|n|}.$$

   Indication. On pourra se ramener au cas où $\int_0^{2\pi} \psi(y)\,dy = 0$.

   (b) En déduire la limite de J_ε quand $\varepsilon \to 0$.

7. *Deuxième cas.* On suppose maintenant seulement que $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est périodique de période 2π, et $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Soit $\varepsilon > 0$. On définit une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ de la façon suivante. On note N_ε la partie entière de $\frac{b-a}{2\pi\varepsilon}$. On définit alors

   $$x_k^\varepsilon = a + 2k\pi\varepsilon, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq N_\varepsilon.$$

   (a) Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} x_{N_\varepsilon}^\varepsilon = b$.

   (b) En déduire que

   $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x_{N_\varepsilon}^\varepsilon}^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)dx = 0.$$

   (c) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq N_\varepsilon - 1$, pour tout $x \in [x_k^\varepsilon, x_{k+1}^\varepsilon]$,

   $$|f(x) - f(x_k^\varepsilon)| \leq 2\pi\varepsilon\|f'\|_\infty.$$

   (d) Montrer que

   $$\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} \int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x_k^\varepsilon)dx = \left(\int_0^{2\pi} \psi(y)dy\right)\left(\varepsilon \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} f(x_k^\varepsilon)\right).$$

   (e) Montrer que

   $$\left|\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} \int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(f(x) - f(x_k^\varepsilon)\right)dx\right| \leq \varepsilon(b-a)\|f'\|_\infty \left(\int_0^{2\pi} |\psi(y)|dy\right).$$

   (f) En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(y)dy\right)\left(\int_a^b f(x)dx\right)$.

8. *Application.* Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = g\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right), \\ u(0) = \alpha, \ u'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (1), définie pour $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Calculer cette solution au moyen de la méthode de variation des constantes. On notera cette solution u_ε.

   (c) On suppose que g est 2π-périodique. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_\varepsilon(t)$ admet une limite quand $\epsilon \to 0^+$, limite que l'on calculera.

III - Intégrales oscillantes

Dans cette partie, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On s'intéresse maintenant à des intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x)dx$$

où λ est un paramètre réel strictement positif.

Dans toute la suite, on fixe $\lambda > 0$.

9. *Cas d'une phase non stationnaire.* On suppose dans cette question que $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

   (a) On définit $L : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ et $M : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ par : pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$, tout $x \in [a, b]$,

$$Lg(x) = \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} g'(x), \quad Mg(x) = -\left(\frac{g}{i\varphi'}\right)'(x).$$

      i. Déterminer les fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ telles que $Lg = g$.

      ii. Soit $g, h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$. On suppose que h est à support compact dans $]a, b[$. Montrer que

$$\int_a^b h(x)Lg(x)dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b g(x)Mh(x)dx.$$

   (b) Montrer que si f est à support compact dans $]a, b[$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante γ_N indépendante de λ telle que

$$|I(\lambda)| \leq \gamma_N \lambda^{-N}.$$

10. (a) On suppose que $|\varphi'(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a,b]$ et que φ' est monotone sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$, indépendante de λ, φ et de a, b, telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 \lambda^{-1}.$$

Indication. On pourra écrire

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \int_a^b i\lambda\varphi'(x) e^{i\lambda\varphi(x)} \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} dx$$

et intégrer par parties.

(b) Soit $\delta > 0$. On suppose que $|\varphi'(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [a,b]$ et que φ' est monotone sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 (\lambda\delta)^{-1}.$$

11. *Cas où la phase peut être stationnaire.* Dans toute cette question, on suppose que $|\varphi''(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a,b]$.

(a) Montrer que φ' est strictement monotone sur $[a,b]$ et qu'il existe un unique point $c \in [a,b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$.

(b) Si $x \in [a,b]$, montrer que $|\varphi'(x)| \geq |x - c|$.

(c) Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2c_1 (\lambda\delta)^{-1} + 2\delta.$$

(d) En déduire qu'il existe une constante c_2, indépendante de λ, φ, a et b telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_2 \lambda^{-1/2}.$$

(e) Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx \right| \leq c_2 \lambda^{-1/2} \left(|f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right).$$

* *
*