$\boxed{\text{Concours} \quad 2011}$

Concours commun X-PC-ENS Option PC Mathématiques
Matrices infiniment divisibles

Notation préliminaire : δ_{ij} est le symbole de Kronecker

1. Première partie : La fonction Γ

1.a. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\varphi_s : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}$ est continue et positive, comme produit de fonctions usuelles étudiées. Au voisinage de 0, $\varphi_s(x) \sim \dfrac{1}{x^{1-s}}$ · Donc, pour tout $a > 0$, φ_s est intégrable sur $]0, a]$ car positive et équivalente à une fonction de Riemann intégrable $\dfrac{1}{x^\alpha}$ en 0 avec $\alpha = 1 - s < 1$ car $s > 0$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\varphi_s(x) = 0$, grâce au théorème de croissances comparées des fonctions usuelles : $\forall \beta \in \mathbb{R} \lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc, d'après la règle de convergence de Riemmann, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_s$ est intégrable sur $[b, +\infty[$. Pour conclure :

$$\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}x^{s-1} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

1.b. Montrons par récurrence que pour tout entier m strictement positif, $\Gamma(m) = (m-1)!$
$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$
À l'aide d'une intégration par parties, on obtient : $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. Si on suppose que $\Gamma(m) = (m-1)!$, alors $\Gamma(m+1) = m.(m-1)! = m!$ Ce qui établit le résultat.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \Gamma(m) = (m-1)!}$$

1.c. Pour établir la continuité de Γ sur $]0, +\infty[$, nous allons établir grâce au théorème de continuité sous $\displaystyle\int$ que $\forall (a, A) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, 0 < a \leqslant 1 < A, \Gamma$ est continue sur $[a, A]$.

Soit $\left| \begin{array}{llll} \varphi & : \mathbb{R}^+ \times [a, A] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & \varphi(t, x) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \end{array} \right.$

$\forall x \in [a, A], t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue par morceaux comme produit de fonctions usuelles continues, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme déjà vu.
$x \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $[a, A]$ au titre d'exponentielle.
$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [a, A], 0 \leqslant \varphi(t, x) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{-t}t^{A-1}}_{pour\ t \in [1, +\infty[} + \underbrace{\mathrm{e}^{-t}t^{a-1}}_{pour\ t \in]0,1]} = \psi(t)$ et ψ est continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme déjà vu.
La majoration s'obtient grâce à la croissance de $t \mapsto t^{A-1}$ et la décroissance de $t \mapsto t^{a-1}$.
Donc $\forall (a, A) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, 0 < a \leqslant 1 < A, \Gamma$ est continue sur $[a, A]$. Et par l'extension au programme du théorème de continuité sous signe $\displaystyle\int$:

$$\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2.a. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons $u \in [0, 1[$. Alors $0 \leqslant 1 - u \leqslant 1$ puis $\dfrac{1}{1-u} \geqslant 1$.
Donc par croissance de l'intégrale, $\forall t \in [0, 1[, \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1-u} - 1\right)\mathrm{d}u \geqslant 0$ et en conséquence, $-\ln(1-t) - t \geqslant 0$ et cette inégalité appliquée en $t = \dfrac{x}{m}$ pour tout $x \in [0, m[$, on obtient :

$\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) \leqslant -\dfrac{x}{m}$, puis : $\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m \leqslant -x$. La croissance de la fonction exponentielle assure finalement que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, m[: \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, inégalité qui se prolonge facilement en $x = m$:

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, m] : \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$$

2.b. Pour $s > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, intégrons par parties :

$$I_m = \int_0^m \underbrace{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m}_{u} \underbrace{x^{s-1}}_{\mathrm{d}v}\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \frac{x^s}{s}\right]_0^m}_{=0} - \int_0^m \left(-\frac{1}{m}\right) \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \frac{x^s}{s}\mathrm{d}x$$

$I_m = \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \cdot \frac{x^s}{s}\mathrm{d}x$ et en posant $x = \dfrac{m}{m-1} \cdot y$, on obtient :

$$I_m = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{s+1} \frac{1}{s} \int_0^{m-1} \left(1 - \frac{y}{m-1}\right)^{m-1} \cdot y^s\mathrm{d}y \qquad (1)$$

Montrons alors par récurrence sur k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$ que :

$$I_m = \frac{m^s}{(m-k)^{s+k}} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{m-j}{s+j}\right) \cdot \int_0^{m-k} x^{s+k-1}\left(1 - \frac{x}{m-k}\right)^{m-k}\mathrm{d}x \qquad (2)$$

La relation est vérifiée pour $k = 1$ d'après la relation (1) précédente.
Comme précédemment, effectuons une intégration par parties puis le changement de variable $x = \dfrac{m-k}{m-k-1} \cdot y$, on obtient alors, mutatis mutandis,

$$I_m = \frac{m^s}{(m-k)^{s+k}} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{m-j}{s+j}\right) \cdot \frac{1}{s+k} \cdot \left(\frac{m-k}{m-k-1}\right)^{s+k} \int_0^{m-k-1} y^{s+k}\left(1 - \frac{y}{m-k-1}\right)^{m-k-1}\mathrm{d}y$$

et en rassemblant :

$$\boxed{I_m = \frac{m^s}{(m-k-1)^{s+k+1}} \prod_{j=0}^{k} \int_0^{m-k-1} y^{s+k}\left(1 - \frac{y}{m-k-1}\right)^{m-k-1}\mathrm{d}y}$$

La formule (2) est établie et donne pour $k = m-1$:

$$I_m = m^s \prod_{j=0}^{m-2} \left(\frac{m-j}{s+j}\right) \cdot \int_0^1 x^{s+m-2}(1-x)\mathrm{d}x$$

$I_m = \dfrac{m^s.m!}{\prod\limits_{j=0}^{m-2}(s+j)} \cdot \displaystyle\int_0^1 x^{s+m-2} - x^{s+m-1}\mathrm{d}x$, et après intégration :

$$\boxed{I_m(s) = \frac{m^s.m!}{\prod\limits_{j=0}^{m}(s+j)}}$$

2.c. Soit $\left| \begin{array}{llll} \chi_m = \chi_{[0,m]} & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [0, m] \\ 1 \text{ si } x \in [0, m] \end{cases} \end{array} \right.$ la fonction caractéristique de $[0, m]$.

Posons $f_m(x) = \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m .x^{s-1}.\chi_m(x)$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Comme la suite de fonctions $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction constante égale à 1, La question **2.a.** assure la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$de la suite de fonction $(f_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ vers $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}.x^{s-1}$. La majoration obtenue en **2.a.** assure que

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leqslant f_m(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.x^{s-1}$, cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ depuis la question **1.a.**
On peut donc conclure, avec le théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\infty} f_m(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{-x}.x^{s-1}\mathrm{d}x = \Gamma(s)$$

Or $\displaystyle\int_0^{\infty} f_m(x)\mathrm{d}x = \int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m.x^{s-1}\mathrm{d}x = \frac{m^s.m!}{\prod_{j=0}^{m}(s+j)}$ suite à la question **2.b.** donc

$$\boxed{\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^s.m!}{\prod_{j=0}^{m}(s+j)}}$$

3. Supposons que $a \geqslant 0$, $d \geqslant 0$ et $ad - b^2 \geqslant 0$.
• Si $a = 0$, alors $ad - b^2 = -b^2$ et donc $b = 0$. Alors $\underline{{}^tXAX = dy^2 \geqslant 0}$
• Si $a > 0$, alors ${}^tXAX = a\left(\left(x + \dfrac{b}{a}\,y\right)^2 + \dfrac{y^2}{a^2}\,(ad-b^2)\right) \geqslant 0$

$$\boxed{\text{Donc si } a \geqslant 0,\ d \geqslant 0 \text{ et } ad-b^2 \geqslant 0 \text{ alors } \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geqslant 0}$$

Réciproquement, si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geqslant 0$, alors

$${}^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underline{a \geqslant 0} \text{ et } {}^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{d \geqslant 0}$$

puis ${}^t\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix} = a(ad-b^2) \geqslant 0$ et ${}^t\begin{pmatrix}d\\-b\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}d\\-b\end{pmatrix} = d(ad-b^2) \geqslant 0$.
• Donc si $a > 0$ ou si $d > 0$ alors $\underline{ad - b^2 \geqslant 0}$
• Sinon $a = 0$ et $d = 0$ et alors ${}^t\begin{pmatrix}1\\-b\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\-b\end{pmatrix} = -2b^2 \geqslant 0$ d'où $b = 0$ et $\underline{ad - b^2 \geqslant 0}$

$$\boxed{\text{Donc si } \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geqslant 0, \text{ alors } a \geqslant 0,\ d \geqslant 0 \text{ et } ad-b^2 \geqslant 0}$$

4. A est symétrique et réelle, donc ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Si $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont les valeurs propres de A, il existe une matrice P orthogonale telle que $D = {}^tPAP = P^{-1}AP$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_i\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Appelons $(\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ considérons le vecteur $X_i = P.\vec{e}_i$. Alors

$$\underbrace{{}^tX_iAX_i}_{\geqslant 0} = {}^t(P\vec{e}_i)A(P\vec{e}_i) = {}^t(\vec{e}_i)({}^tPAP)\vec{e}_i = {}^t(\vec{e}_i)D\vec{e}_i = \lambda_i.$$

Réciproquement la famille $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, image de la base $(\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ par une matrice orthogonale est une base de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout vecteur $X = \sum_{k=1}^{n} x_kX_k$:

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^t(P\vec{e}_i).A.\sum_{j=1}^{n} x_j(P\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^t(\vec{e}_i).{}^tPAP.\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j{}^t(\vec{e}_i).D.\vec{e}_j.$$

et comme ${}^t(\vec{e}_i).D.\vec{e}_j = \lambda_i\delta_{ij}$, on obtient :

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

$$\boxed{A \text{ est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.}}$$

5. Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_i\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $D = {}^tD$ et $DA = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\delta_{ik}a_{kj} = \lambda_ia_{ij}$ et $AD = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k\delta_{kj} = \lambda_ja_{ij}$.
Donc $DAD = {}^tDAD = (\lambda_i\lambda_ja_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et donc $B = {}^tDAD$. Calculons ensuite :
$\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXBX = {}^tX{}^tDADX = {}^t(DX)A(DX) \geqslant 0$ car A est positive.

$$\boxed{B \text{ est positive.}}$$

<u>Corollaire 1</u> utile pour la suite : Si A est positive, alors $\forall \mu \in \mathbb{R}^+, \mu A$ est positive. Il suffit <u>de choisir</u> $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = \sqrt{\mu}$. Le résultat s'obtient facilement aussi par une démonstration directe : ${}^tXAX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{ij} \geqslant 0 \Longrightarrow {}^tX\mu AX = \mu({}^tXAX) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\mu a_{ij} \geqslant 0$

6. Si $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, exprimons la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sur cette base : $u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}e_j$ et appelons M la matrice (λ_{ij}). Calculons alors $\langle u_i, u_j\rangle$.

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}e_k, \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_{j\ell}e_\ell\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_{ik}\lambda_{j\ell}\underbrace{\langle e_k, e_\ell\rangle}_{=\delta_{k\ell}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}\lambda_{jk} = (M{}^tM)_{ij}$$

Donc ${}^tXAX = {}^tXM{}^tMX = {}^t({}^tMX)({}^tMX) = \|\,{}^tMX\,\|^2 \geqslant 0$.

$$\boxed{A = (\langle u_i, u_j\rangle) \text{ est positive.}}$$

7. Reprenons $(\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice positive et $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_i\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $\forall i[\![1,n]\!], \lambda_i \geqslant 0$.
${}^t\vec{e}_kA\vec{e}_k = a_{kk}$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!], a_{kk} \geqslant 0$. Calculons :

$${}^tX(A*B)X = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{ij}\lambda_i\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2a_{ii}\lambda_i \geqslant 0, \text{ donc}$$

$$\boxed{A*B \text{ est positive}}$$

8.a. Reprenons la matrice orthogonale P de la diagonalisation de la question **4.**, et donc $D = {}^tPAP = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \geqslant 0$. Pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, considérons les vecteurs $Z_p = \sqrt{\lambda_p}\vec{e}_p$, alors $Z_p{}^tZ_p = (\lambda_p\delta_{ip}\delta_{jp})$. Donc $D = \sum_{p=1}^{n} Z_p{}^tZ_p$ puis

$$A = \sum_{p=1}^{n} PZ_p{}^tZ_p{}^tP = \sum_{p=1}^{n} PZ_p{}^t(PZ_p) \text{ et en posant } Y_p = PZ_p : \boxed{A = \sum_{p=1}^{n} Y_p{}^tY_p}$$

Montrons d'abord 2 résultats intermédiaires simples qui ne sont pas demandés.
Lemme 1 Si A et B sont 2 matrices positives, alors $A + B$ est positive :
${}^tX(A+B)X = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j(a_{ij}+b_{ij}) = \sum_{i,j} x_ix_ja_{ij} + \sum_{i,j} x_ix_jab_{ij} = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$.
Le résultat pour une somme de n matrices positives en découle par une récurrence simple.

Lemme 2 Si $A = Y{}^tY$ avec $Y = \sum_{k=1}^{n} y_k\vec{e}_k$ alors $A = (y_iy_j)$ et A est positive.
Le calcul découle directement de la définition du produit matriciel et pour la positivité de A :

$${}^tX(Y{}^tY)X = (\underbrace{{}^tXY}_{\in\mathbb{R}}){}^t({}^tXY) = ({}^tXY)^2 \geqslant 0$$

8.b. Soit donc maintenant A et B deux matrices positives.

D'après **8.a.** il existe n vecteurs $(Y_p)_{1\leqslant p\leqslant n}$ tels que $A=\displaystyle\sum_{p=1}^{n} Y_p{}^tY_p$ et $A*B=\displaystyle\sum_{p=1}^{n} Y_p{}^tY_p*B$

Or pour tout p, $Y_p{}^tY_p=(y_{p_i}y_{p_j})$ donc $Y_p{}^tY_p*B=(y_{p_i}y_{p_j}b_{ij})$ est positive d'après **5.**
$A*B$ s'exprime comme une somme de n matrices positives $(Y_p{}^tY_p*B)_{1\leqslant p\leqslant n}$ et donc est positive à son tour d'après le *lemme 1*. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont positives alors } A*B \text{ est positive.}}$$

9.a. D'après **3.** $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}$ est positive si et seulement si $a\geqslant 0$, $d\geqslant 0$ et $ad\geqslant b^2$. Si $r>0$, la croissance de $x\mapsto x^r$ sur $\mathbb{R}^+$ conduit à $a^r\geqslant 0$, $d^r\geqslant 0$ et $a^rd^r=(ad)^r\geqslant b^{2r}=(b^r)^2$ car $b\geqslant 0$ et la réciproque de **3.** permet de conclure :

$$\boxed{\text{Si } A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est positive à coefficients positifs, alors } A \text{ est infiniment divisible.}}$$

9.b. D'après la question **4.** A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Or $\det(A-\lambda I_3)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$. Les valeurs propres de A sont donc positives ou nulles et $\boxed{A \text{ est positive.}}$
De même, $\det(A^{*r}-\lambda I_3)=(1-\lambda)(\lambda^2-(1+2^r)\lambda+2^r-2)$ et les valeurs propres de A^{*r} sont positives si et seulement si les racines du trinôme $\lambda^2-(1+2^r)\lambda+2^r-2$ le sont, soit avec somme et produit : $\lambda_2+\lambda_3=1+2^r\geqslant 0$ et $\lambda_2\lambda_3=2^r-2\geqslant 0\iff r\geqslant 1$. Finalement

$$\boxed{A^{*r} \text{ est positive} \iff r\geqslant 1}$$

10. Soit $\Lambda_r={}^t(\lambda_1^r,\lambda_2^r,\dots,\lambda_n^r)$. D'après le *lemme 2* précédent, $C=\Lambda_r{}^t\Lambda_r=(\lambda_i^r\lambda_j^r)$ est positive. A étant infiniment divisible, $A^{*r}=(a_{ij}^r)$ est positive et donc d'après la question **8.b.** $(C*A^{*r})$ est positive. Comme $B^{*r}=C*A^{*r}=(\lambda_i^r\lambda_j^ra_{ij}^r)$:

$$\boxed{B=(\lambda_i\lambda_ja_{ij}) \text{ est infiniment divisible}}$$

11. Comme A est positive à coefficients positifs, $A^{*\frac{1}{m}}$ aussi. Donc d'après la remarque de l'énoncé en tête de la troisième partie, pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, $A^{*\frac{r}{m}}=\left(A^{*\frac{1}{m}}\right)^{*r}$ est positive. Donc pour $r\in\mathbb{Q}_+^*$, A^{*r} est positive.
Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Utilisons la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n=r$. L'écriture de la limite pour « $\varepsilon=\dfrac{r}{2}$ » nous assure que tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang. on peut donc considérer que $\forall n\in\mathbb{N}, r_n>0$. la continuité de la fonction exponentielle assure que $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{ij}^{r_n}=a_{ij}^r$.
Comme $r_n\in\mathbb{Q}_+^*$, A^{*r_n} est positive, $\forall X\in\mathbb{R}^n, {}^tXA^{*r_n}X=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{ij}^{r_n}\geqslant 0$ et les théorème d'addition des limites et de passage à la limite dans une inégalité assurent que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{ij}^{r_n}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{ij}^{r}={}^tXA^{*r}X\geqslant 0$.

$$\boxed{A \text{ est infiniment divisible.}}$$

12.a. $\{\lambda_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de n réels strictement positifs et $C=(c_{ij})$ est la matrice définie par $c_{ij}=\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\cdot$ Si u_i est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $u_i(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_it}\in\mathcal{H}$, alors :

$$\langle u_i,u_j\rangle=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_it}.\mathrm{e}^{-\lambda_jt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$$

et d'après le résultat de la question **6.**

$$\boxed{C \text{ est positive}}$$

12.b. $r>0$ et $a>0$. Donc en effectuant le changement de variable $u=t\alpha$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\alpha}t^{r-1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)^{r-1}\frac{\mathrm{d}u}{\alpha}=\frac{1}{\alpha^r}\,\Gamma(r),\text{ donc}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha^r}=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\alpha}t^{r-1}\mathrm{d}t}$$

12.c. Pour tous couple de réels (a,b), $(a-b)^2\geqslant 0$, soit $\forall t\in\mathbb{R}^+, |\,u(t)v(t)\,|\leqslant\dfrac{1}{2}\,(u(t)^2+v(t)^2)$

$$\text{donc } \forall t\in\mathbb{R}^+, |\,u(t)v(t)\,|\,t^{r-1}\leqslant\frac{1}{2}\,(u(t)^2t^{r-1}+v(t)^2t^{r-1})$$

Comme $(u,v)\in\mathcal{H}_r^2$, le théorème de comparaison assure que $t\mapsto u(t)v(t)t^{r-1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$ est définie sur $\mathcal{H}_r$. La linéarité de l'intégrale donne la bilinéarité de l'application et la croissance de l'intégrale assure la positivité de la forme bilinéaire. Pour finir, si $\displaystyle\int_0^{+\infty}u(t)^2t^{r-1}\mathrm{d}t=0$, comme $t\mapsto u(t)^2t^{r-1}$ est positive et continue, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, u(t)=0$, et le prolongement par continuité en 0 conduit à $\forall t\in\mathbb{R}^+, u(t)=0$. La forme est définie.

$$\boxed{(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle \text{ munit } \mathcal{H}_r \text{ d'un produit scalaire.}}$$

12.d. Comme $\lambda_i>0$, pour $\alpha=2\lambda_i$, l'application $u_i:t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}}\,\mathrm{e}^{-\lambda_it}\in\mathcal{H}_r$ d'après la question **12.b.** Et toujours d'après la question **12.b.** on a :

$\langle u_i,u_j\rangle=\dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}t^{r-1}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)^r}$, et la question **6.** permet de conclure :

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ est infiniment divisible.}}$$

13.a. D'après la question **2.c.** en posant $I_m(s)=\dfrac{m^s.m!}{\displaystyle\prod_{j=0}^{m}(s+j)}$, on a $\Gamma(s)=\displaystyle\lim_{m\to\infty}I_m(s)$

Les théorèmes sur produit et quotient de limites donnent : $k_{ij}=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{I_m(\lambda_i+\lambda_j+1)}{I_m(\lambda_i+1).I_m(\lambda_j+1)}$
Calculons :

$$\frac{I_m(\lambda_i+\lambda_j+1)}{I_m(\lambda_i+1).I_m(\lambda_j+1)}=\frac{m!.m^{\lambda_i+\lambda_j+1}}{\displaystyle\prod_{k=0}^{m}(\lambda_i+\lambda_j+1+k)}\cdot\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{m}(\lambda_i+1+k)}{m!.m^{\lambda_i+1}}\cdot\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{m}(\lambda_j+1+k)}{m!.m^{\lambda_j+1}}$$

$$=\frac{1}{m.m!}\prod_{k=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+k)(\lambda_j+k)}{\lambda_i+\lambda_j+k}.\text{ Finalement,}$$

$$\boxed{k_{ij}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m.m!}\prod_{k=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+k)(\lambda_j+k)}{\lambda_i+\lambda_j+k}}$$

13.b. Soit $p \geqslant 1$ un entier, et r un réel strictement positif. Considérons comme en **12.c.** l'espace vectoriel $\mathcal{H}_r$ et l'application
$$\left| \begin{array}{rcl} \langle \cdot,\cdot\rangle_p : \mathcal{H}_r & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u,v\rangle_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v(t)\mathrm{e}^{-pt}t^{r-1}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
En procédant comme en **12.c.**, on montre que $\langle \cdot,\cdot\rangle_p$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}_r$, mutatis mutandis. On reprend les applications définies en **12.d.** $u_i : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}}\,\mathrm{e}^{-\lambda_i t}$, alors
$$\langle u_i,u_j\rangle_p = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_j+p)t}t^{r-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r} \text{ d'après } \mathbf{12.b.}$$
Et encore une fois le résultat de **6.** permet de conclure que pour tout réel $r>0$ la matrice $\left(\dfrac{1}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive donc, par définition, la matrice $\left(\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j+p}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est infiniment divisible. En considérant la famille de réels strictement positifs (λ_i+p) et le résultat de la question **10.**, on obtient que
$$\boxed{\text{la matrice } B_p = \left(\frac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{\lambda_i+\lambda_j+p}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est infiniment divisible.}}$$
Continuons, par définition d'infiniment divisible, pour tout réel $r>0$ et tout entier $p>0$ les matrices B_p^{*r} sont positives. En notant $\bigotimes$ le produit de plusieurs matrices au sens la loi $*$, et d'après la question **7.**, on peut affirmer que la matrice
$$\bigotimes_{p=1}^{m+1} B_p^{*r} = \left(\prod_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)^r(\lambda_j+p)^r}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est positive.}$$
et en multipliant par les scalaires $\lambda_i = \dfrac{1}{\sqrt{(m.m!)^r}}$, la question **5.** assure que la matrice
$$\Delta_r(m) = \left(\frac{1}{(m.m!)^r}\prod_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)^r(\lambda_j+p)^r}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est positive.}$$
Donc $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tX\Delta_r(m)X = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\,\frac{1}{(m.m!)^r}\prod_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)^r(\lambda_j+p)^r}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r} \geqslant 0$

Comme l'application $x \mapsto x^r$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, les théorèmes d'addition des limites et de passage à la limite dans une inégalité donnent avec le résultat de **13.a.** :
$$\forall r>0, \lim_{m\to+\infty}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\,\frac{1}{(m.m!)^r}\prod_{p=1}^{m+1}\frac{(\lambda_i+p)^r(\lambda_j+p)^r}{(\lambda_i+\lambda_j+p)^r} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jk_{ij}^r \geqslant 0$$
$$\boxed{\text{La matrice } K = (k_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est infiniment divisible.}}$$

14. Établissons d'abord le petit lemme suivant :
lemme 3 Si f est une application dérivable sur $[0,+\infty[$ vérifiant $\forall x \in [0,+\infty[, f(x) \geqslant 0$, alors $f'(0) \geqslant 0$.
Comme $\forall x \in [0,+\infty[, f(x)\geqslant 0$, on a $\forall x \in [0,+\infty[, \dfrac{f(x)}{x} \geqslant 0$ et par passage à la limite à droite en 0 on peut conclure que $\underline{f'(0)\geqslant 0}$.
Considérons $X = {}^t(x_1,\dots,x_n)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k = 0$ et la fonction

$$\left| \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & f(r) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\left(\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)^r \end{array} \right.$$
f est combinaison linéaire d'exponentielles donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part $f(0) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 0$ et $f'(0) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j(-\ln(\lambda_i+\lambda_j))$

Puis comme la matrice $\left(\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est infiniment divisible, f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $f(0)=0, \forall r \in \mathbb{R}^+, f(r)\geqslant 0$. On peut donc affirmer avec le *lemme 3* que
$$f'(0) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j(-\ln(\lambda_i+\lambda_j)) \geqslant 0. \text{ finalement :}$$
$$\boxed{A = (-\ln(\lambda_i+\lambda_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est conditionnellement positive.}}$$

15. Montrons l'implication demandée.
D'abord (ii)$\Longrightarrow$(i). Soit $C = B+\varepsilon I_n+\lambda J$ et X tel que $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$. Alors
$${}^tXCX = {}^tXBX + \varepsilon{}^tXI_nX + \lambda{}^tXJX$$
Or ${}^tXJX = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 0$ et ${}^tXI_nX = \| X \|^2$

donc $\quad {}^tXCX = {}^tXBX + \varepsilon\| X \|^2$

et $\quad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall X; x_1+x_2+\ldots+x_n = 0, {}^tXBX + \varepsilon\| X \|^2 \geqslant 0$

car C est positive. Par passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$, on a
$$\boxed{{}^tXBX \geqslant 0 \text{ et (ii)}\Longrightarrow\text{(i).}}$$

16.a. On procède comme en **14.** en posant $f(r) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{ij}^r$, mutatis mutandis.

lemme 4 J est positive.
On applique le *lemme 2* vu à la question **8.** avec le vecteur $Y = {}^t(1,1,\dots,1)$ car $A = Y{}^tY$.

16.b. On suppose que B est conditionnellement positive. Donc $\forall\varepsilon>0$, $\exists\lambda>0$ tel que la matrice $C = B+\varepsilon I_n+\lambda J = (c_{ij})$ est positive. Le *corollaire 1* énoncé en question **5.** assure que pour tout réel $r\geqslant 0$ la matrice rC est positive. Ensuite la question **8.b.** donne, à l'aide d'une récurrence simple, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(rC)^{*n}$ est aussi positive et finalement $\dfrac{1}{n!}(rC)^{*n} = \left(\dfrac{r^nc_{ij}^n}{n!}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est encore positive d'après le *corollaire 1.*
On a établi le *lemme 1* pour affirmer qu'une somme de matrices positives est encore positive et donc ici, comme J est positive :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{ la matrice } J + \left(\sum_{n=1}^p \frac{r^nc_{ij}^n}{n!}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est positive.}$$
Donc pour tout vecteur X, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\left((1+\sum_{n=1}^p\frac{r^nc_{ij}^n}{n!}\right) \geqslant 0$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite pour $p \to +\infty$ pour conclure :
$$\boxed{\forall r>0, \forall X \in \mathbb{R}^n : \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\mathrm{e}^{rc_{ij}} \geqslant 0 \text{ donc } (\mathrm{e}^{rc_{ij}})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est positive.}}$$

Pour établir que $(\mathrm{e}^{rb_{ij}})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un vecteur X_0 tel que ${}^tX_0(\mathrm{e}^{rb_{ij}})X_0 < 0$. Posons alors $\alpha = {}^tX_0(\mathrm{e}^{rb_{ij}})X_0 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\mathrm{e}^{rb_{ij}}$

et $\beta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\mathrm{e}^{rb_{ii}}$. Il est clair que $X_0 = {}^t(x_1,\dots,x_n) \neq \vec{0}$ et qu'en conséquence $\underline{\beta > 0}$.

Posons alors $\varepsilon = \dfrac{1}{r}\ln\Big(1-\dfrac{\alpha}{2\beta}\Big)\cdot$ Comme $\alpha<0$ et $\beta>0$, on a que $\underline{\varepsilon>0}$ et $\underline{\mathrm{e}^{\varepsilon r}-1 = -\dfrac{\alpha}{2\beta}}$.

D'après l'implication admise en question **15.**, il existe $\lambda > 0$ tel que la matrice $C = B+\varepsilon I_n + \lambda J = (c_{ij})$ est positive.

Nous allons montrer que ${}^tX_0(\mathrm{e}^{rc_{ij}})X_0 < 0$, ce qui contredit le résultat établi précédemment dans la question.

Comme $C = B+\varepsilon I_n+\lambda J$, $rc_{ij} = rb_{ij}+r\varepsilon\delta_{ij}+\lambda r$; en passant à l'exponentielle, on obtient : $\mathrm{e}^{rc_{ij}} = \mathrm{e}^{rb_{ij}}.\mathrm{e}^{r\varepsilon\delta_{ij}}.\mathrm{e}^{\lambda r}$ puis $\underline{\mathrm{e}^{-\lambda r}\mathrm{e}^{rc_{ij}} = \mathrm{e}^{rb_{ij}}.\mathrm{e}^{r\varepsilon\delta_{ij}}}$, donc :

$$\begin{aligned}
{}^tX_0(\mathrm{e}^{-\lambda r}\mathrm{e}^{rc_{ij}})X_0 = {}^tX_0(\mathrm{e}^{rb_{ij}}.\mathrm{e}^{r\varepsilon\delta_{ij}})X_0 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j.\mathrm{e}^{rb_{ij}}.\mathrm{e}^{r\varepsilon\delta_{ij}}\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j.\mathrm{e}^{rb_{ij}}.\underbrace{(\mathrm{e}^{r\varepsilon\delta_{ij}}-1)}_{=0 \text{ si } i\neq j} + \underbrace{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j.\mathrm{e}^{rb_{ij}}}_{=\alpha}\\
&= (\mathrm{e}^{\varepsilon r}-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2\mathrm{e}^{rb_{ii}} + \alpha = \frac{\alpha}{2} < 0
\end{aligned}$$

Donc ${}^tX_0(\mathrm{e}^{-\lambda r}\mathrm{e}^{rc_{ij}})X_0 < 0$ et en multipliant par $\mathrm{e}^{\lambda r}$, on a la contradiction attendue : ${}^tX_0(\mathrm{e}^{rc_{ij}})X_0 < 0$ et finalement

$$\boxed{(\mathrm{e}^{rb_{ij}})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est positive.}}$$

17.a. Montrons que la matrice $Z = (-\mid z_i - z_j\mid^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est conditionnellement positive. Le résultat sera alors établi d'après la question précédente. En effet la question **16.b.** assure que $(\mathrm{e}^{-r\mid z_i-z_j\mid^2})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \Big((\mathrm{e}^{-\mid z_i-z_j\mid^2})^r\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive, c'est-à-dire que $(\mathrm{e}^{-\mid z_i-z_j\mid^2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est infiniment divisible.

De façon évidente, la somme de deux matrices conditionnellement positives l'est encore. Séparons partie réelle et partie imaginaire avec $-\mid z_i-z_j\mid^2 = -(u_i-u_j)^2-(v_i-v_j)^2$ et montrons que la matrice $U = \big(-(u_i-u_j)^2\big)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est conditionnellement positive. Le résultat en découlera avec $Z = U+V$ si $V = \big(-(v_i-v_j)^2\big)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Pour tout vecteur $X = {}^t(x_1,\dots,x_n)$ tel que $x_1+\dots+x_n = 0$, calculons ${}^tXUX$.

$$\begin{aligned}
{}^tXUX &= -\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j(u_i-u_j)^2\\
&= -2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j(u_i-u_j)^2 \qquad \text{en éliminant les termes nuls pour } i=j\\
&= -2\Bigg(\underbrace{\underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_ju_j^2}_{\sum_{i=1}^{n-1} x_iu_i^2\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_j\right)}}_{=\downarrow} - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_ju_iu_j + \underbrace{\underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_ju_j^2}_{\sum_{j=2}^{n} x_ju_j^2\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_i\right)}}_{=\downarrow}\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^tXUX = &-2\Bigg(\overbrace{x_1u_1^2\Big(\sum_{j=2}^{n}x_j\Big) + \sum_{i=2}^{n-1}x_iu_i^2\Big(\sum_{j=i+1}^{n}x_j\Big)} + \overbrace{\sum_{i=2}^{n-1}x_iu_i^2\Big(\sum_{j=1}^{i-1}x_j\Big) + x_nu_n^2\Big(\sum_{j=1}^{n-1}x_j\Big)}^{\text{en permutant les rôles de } i \text{ et } j}\Bigg)\\
&+ 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_ju_iu_j
\end{aligned}$$

et grâce à la relation $x_1+\dots+x_n = 0$, cela devient en rassemblant $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}x_j + \sum_{j=1}^{i-1}x_j = -x_i$:

$$\begin{aligned}
{}^tXUX &= -2\Big(-x_1^2u_1^2 - \sum_{i=2}^{n-1}x_i^2u_i^2 - x_n^2u_n^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_ju_iu_j\Big)\\
&= 2\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2u_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_ju_iu_j\Big)\\
&= 2\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\Big)^2 \geqslant 0. \text{ Finalement } U \text{ est conditionnellement positive donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathrm{e}^{-\mid z_i-z_j\mid^2})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est infiniment divisible}}$$

17.b. Montrons que, pour tout réel $t>0$, la matrice $\left(\dfrac{1}{t+|\,z_i-z_j\,|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive.

D'après la question précédente, $(\mathrm{e}^{-|\,z_i-z_j\,|^2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est infiniment divisible. En choisissant $\lambda_i=\mathrm{e}^{-t/2}$, $(\mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{-|\,z_i-z_j\,|^2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est infiniment divisible d'après la question **10.**
Donc pour tout réel $r>0$, pour tout vecteur $X={}^t(x_1,\dots,x_n)$ et pour tout réel $t>0$,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\mathrm{e}^{-(t+|\,z_i-z_j\,|^2)r}\geqslant 0. \qquad (A)$$

L'application $r\to x_ix_j\mathrm{e}^{-(t+|\,z_i-z_j\,|^2)r}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ depuis la question **12.b.** où r joue le rôle de t (paramètre d'intégration), où la constante $r=1$ et $\alpha=t+|\,z_i-z_j\,|^2$.
L'application $r\to\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\mathrm{e}^{-(t+|\,z_i-z_j\,|^2)r}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions intégrables et la croissance de l'intégrale nous assure, en intégrant l'inégalité (A) précédente, avec le résultat de la question **12.b.** que

$$\forall X={}^t(x_1,\dots,x_n),\forall t>0,\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{t+|\,z_i-z_j\,|^2}\geqslant 0$$

$$\boxed{\text{et la matrice } \left(\dfrac{1}{t+|\,z_i-z_j\,|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est positive.}}$$

Lemme 5 Montrons simplement que si $A=(a_{ij})$ est une matrice positive, alors $A-J$ (et plus généralement $\forall\gamma\in\mathbb{R}$, $A+\gamma J$) est conditionnellement positive.

Ce résultat découle directement de ${}^tXJX=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2=0$ si $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=0$.

En utilisant la question précédente, on peut affirmer que pour tout réel u non nul, la matrice $\left(\dfrac{u^2}{u^2+|\,z_i-z_j\,|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive, et par conséquent avec le *lemme 5*, la matrice $\left(\dfrac{u^2}{u^2+|\,z_i-z_j\,|^2}-1\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est conditionnellement positive. Donc, pour tout vecteur X tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=0$: $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j\,\frac{-|\,z_i-z_j\,|^2}{u^2+|\,z_i-z_j\,|^2}\geqslant 0.$

Si $i\neq j$, alors $u\to\dfrac{-|\,z_i-z_j\,|^2}{u^2+|\,z_i-z_j\,|^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car équivalent à l'infini à $-\dfrac{|\,z_i-z_j\,|^2}{u^2}$, et, si $i=j$, le terme correspondant est nul. Donc par croissance de l'intégrale :

pour tout vecteur X tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=0$: $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j\int_0^{+\infty}\frac{-|\,z_i-z_j\,|^2}{u^2+|\,z_i-z_j\,|^2}\,\mathrm{d}u\geqslant 0$. En posant maintenant $t=u^2$ dans chacune des intégrales non nulles, il vient :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty}-t^{1/2}\,\frac{-|\,z_i-z_j\,|^2}{t+|\,z_i-z_j\,|^2}\,\mathrm{d}t}_{=a_{ij}}\geqslant 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i=0$$

$$\boxed{\text{La matrice } (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est donc conditionnellement positive.}}$$

17.c. Calculons $a_{ij}=-\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{-1/2}\,\frac{|\,z_i-z_j\,|^2}{t+|\,z_i-z_j\,|^2}\,\mathrm{d}t$ lorsque $i\neq 0$. En posant $t=u^2$,

$$\begin{aligned}a_{ij}&=-2\int_0^{+\infty}\frac{|\,z_i-z_j\,|^2}{u^2+|\,z_i-z_j\,|^2}\,\mathrm{d}u\\&=-2\,|\,z_i-z_j\,|^2\left(\frac{1}{|\,z_i-z_j\,|}\left[\operatorname{Arc}\tan\frac{u}{|\,z_i-z_j\,|}\right]_0^{+\infty}\right)\\&=-2\,|\,z_i-z_j\,|\cdot\frac{\pi}{2}\\&=-\pi\,|\,z_i-z_j\,|\end{aligned}$$

En remarquant que si A est conditionnellement positive, alors pour tout réel $k\geqslant 0$, kA l'est aussi. On en déduit d'après la question précédente que la matrice $=(-\,|\,z_i-z_j\,|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est conditionnellement positive.
La question **16.b.** nous assure que la matrice $=(\mathrm{e}^{-r|\,z_i-z_j\,|})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive, et comme $\mathrm{e}^{-r|\,z_i-z_j\,|}=(\mathrm{e}^{-|\,z_i-z_j\,|})^r$, on peut conclure

$$\boxed{(\mathrm{e}^{-|\,z_i-z_j\,|})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est infiniment divisible}}$$